جامعة تكريت
كلية العلوم
الفيزياء

الفيزياء الرياضية

المعادلات التفاضلية

استاذ دكتورة عواطف صابر جاسم

الفصل الرابع
المعادلات التفاضلية

مقدمة :- هي عبارة عن علاقة بين متغير مثل x ودالة غير محددة مثل $y(x)$ وهي تنطوي على مشتق واحد او اكثر او على تفاضل واحد او اكثر .

ومن امثلة المعادلات التفاضلية :-

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + 1 \quad \text{------} \quad (1)$$

$$x^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + x\frac{dy}{dx} + 4y = x^2 \quad \text{------} \quad (2)$$

$$\frac{dz}{dx} = 8x + \sqrt{y} \quad \text{------} \quad (3)$$

معادله (1) من الرتبه الاولى والدرجه الاولى .
معادله (2) من الرتبه الثالثه والدرجه الثانيه .
معادله (3) معادله تفاضليه جزئية

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$$
درجه ، رتبه

* وعندما تتضمن المعادله التفاضليه مشتقه او اكثر بالنسبه الى متغير معين فأن المتغير يسمى بالمتغير المستقل واذا ظهرت في المعادله مشتقه متغير ما يسمى بالمتغير التابع .

مثال

$$\frac{dq}{dt} = kq$$

1- t :- متغير مستقل

2- q :- متغير تابع

3-

حل المعادلة التفاضلية

تعتبر الدالة $y=f(x)$ حل المعادلة التفاضلية عندما تكون الدالة ومشتقاتها متصلتان، والاشتقاقات غالباً ما تمثل بالصورة الاتية

$$\frac{dy}{dx} = y' = y \quad , \quad \frac{d^2y}{dx^2} = y'' = y^{(2)}$$

$$y^{(0)} = y \quad , \quad f(x, y, y^{(1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0 \quad \text{---} \circledast$$

تسمى هذه المعادلة بالمعادلة التفاضلية من الرتبة n ويمكن حلها بالشكل الاتي :-

$$y^{(n)} = f(x, y, y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{n-1})$$

حيث f تعتبر دالة في المتغيرات $n+1$ ومستمرة في المنطقة A

مثال الدالة $(x^2)=y$ حل المعادلة التفاضلية $y' = \frac{2y}{x}$

$$-\infty < x < 0 \quad \text{او} \quad 0 < x < \infty$$

مثال / اوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية الاتية .

1) $y' = 2x$ 2) $y'' = e^x$

$y=0$ عندما $x=1$

1) $y' = 2x$

$$\frac{dy}{dx} = 2x \Rightarrow dy = 2x\,dx$$

نفصل المتغيرات x مع x و y مع y

$$\int dy = \int 2x\,dx$$

نكامل الطرفين

$$y = \frac{2x^2}{2} + c$$

$x \leftarrow \frac{x^2}{2}$

$$y = x^2 + c$$

2) $y'' = e^x$ $\qquad x = 1 \;,\; y' = 0$

$\int y'' = \int e^x$

$y' = e^x + c_1 \qquad (x=1)(y=0)$

1- نكامل

$0 = e^{(1)} + c_1 \quad \Rightarrow \quad c_1 = -e$

2- نعوض القيم لايجاد c_1

$y' = e^x + c_1$

3- نأخذ المعادلة التي كاملناها
نعوض قيم c_1 فيها

$\int y' = \int e^x - \int e$

4- نعوض المعادلة بعد
تعويضها بقيمة c_1

$y = e^x - ex + c_2 \qquad (y=1)(x=1)$

5- نعوض قيم x و y لايجاد
قيمة c_2

$(1) = e^{(1)} - e(1) + c$

$1 = e - e + c_2$

ثم نجد الحل العام

$c_2 = 1$

$$\boxed{y = e^x - ex + 1}$$

الحل العام للمعادلة
التفاضلية

مثال/ بين ان الحل $y = ax^2$ يحقق المعادله التفاضليه

$$xy' - 2y = 0$$

الحل

∵ المعطى في المعادله y' اذا نشتق

$$y = ax^2 \longrightarrow y' = 2ax$$

نعوض المشتقه في المعادلة y' و ax^2 بدل y

$$x(2ax) - 2(ax^2) = 0$$

$$2ax^2 - 2ax^2 = 0$$

∴ الناتج صفر فالحل يحقق المعادله التفاضلية

المعادله التفاضليه من الرتبه الاولى

الشكل العام للمعادله التفاضليه ذات الرتبه الاولى والدرجه الاولى هو

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = -\frac{P(x, y)}{\Phi(x, y)}$$

ومن طرق حل المعادله التفاضليه ذات الرتبه الاولى والدرجه الاولى

اولاً :- فصل المتغيرات

$$P(x)\,dx + \Phi(y)\,dy = 0$$

فأن المتغيرات قابله للفصل وتسمى هذه العمليه (فصل المتغيرات)

ويمكن ان تكون بالشكل الاتي

$$f_1(x)\,dx + f_2(y)\,dy = 0$$

حيث يمكن ايجاد الحل بعد ان نكامل المعادله الاخيرة :

$$\int f_1(x)\,dx + \int f_2(y)\,dy$$

حيث c ثابت اختياري

مثال/ اوجد حل المعادلة الآتية :

$$y\frac{dy}{dx} = x\, e^{y^2}$$

الحل/

$$y\, dy = x\, e^{y^2}\, dx$$

$\div\, e^{y^2}$

خطوات الحل

$$y\frac{dy}{e^{y^2}} = x\frac{e^{y^2}}{e^{y^2}}\, dx$$

1- نفصل المتغيرات

$$\frac{y}{e^{y^2}}\, dy = x\, dx$$

y مع dy و x مع dx

2- نقسم على e^{y^2}

$$e^{-y^2}\, y\, dy = x\, dx$$

3- نوجد مشتقة e^{-y^2}

$$\int e^{-y^2}\, y\, dy = \int x\, dx$$

ثم نكامل الطرفين

$$-\frac{1}{2}\int e^{-y^2}(-2y)\, dy = \int x\, dx$$

$$-\frac{1}{2}e^{-y^2} = \frac{1}{2}x^2 + c$$

$$\cancel{2}\left(-\frac{1}{\cancel{2}}\right)e^{-y^2} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}x^2 + c$$

$$-e^{-y^2} = x^2 + c$$

$$\boxed{c = x^2 + e^{-y^2}}$$

حل المعادلة التفاضلية

مثال / حل المعادلة التفاضلية :

$$\frac{ds}{dt} = 15-18s$$

حيث $s=0$ عندما $t=0$

$$ds = (15-18s)\,dt$$

الحل /

1- نفصل المتغيرات .

$$\frac{ds}{(15-18s)} = dt$$

2- نقسم الطرفين على $(15-18s)$.

$$\frac{-18}{-18}\int \frac{ds}{(15-18s)} = \int dt$$

3- نضع الحدود التي تحوي s مع ds

والحدود التي تحوي t مع dt .

$$-\frac{1}{18}\int \frac{-18}{(15-18s)}\,ds = \int dt$$

4- نكامل الطرفين لكن يجب ان نوفر مشتقة المقام

$$-\frac{1}{18}\left[\ln(15-18s)\right] = t+c$$

فنضيف قبل التكامل $\frac{-18}{-18}$

$$\frac{-18}{-18}\left[\ln(15-18s)\right] = -18\,(t+c)$$

$$\ln(15-18s) = -18\,(t+c)$$

التخلص من $\ln$ بأخذ e للطرفين

$$e^{\ln(15-18s)} = e^{-18(t+c)}$$

$$15-18s = c\,e^{-18(t)}$$

$$15-18(0) = c\,e^{-18(0)}$$

نعوض $t(0)$ $s=0$

$$15-0 = c_1 e^{0} \Rightarrow c_1 = 15$$

$$15-18s = 15\,e^{-18t}$$

Scanned with CamScanner