4-4 العلاقة بين متغيرات الحركة الدورانية والخطية

(Relation between Variables of Linear and Rotational Motion)

إذا تحرّك جسم من نقطة (A) إلى نقطة (B) وقطع قوسا طوله (s) على محيط الدائرة نصف قطرها (R) وكما مُبيّن في الشكل (4 – 1) ، فالزاوية التي تقابل القوس تسمى بالإزاحة الزاوية ويرمز لها بالرمز ($\vec{\theta}$) وتمثّل نسبة طول القوس إلى نصف قطر هذه الدائرة ، أي أن :

$$\vec{\theta} = \frac{s}{R} ...(18-4)$$

ومنها :

$$s = R\vec{\theta} ...(19-4)$$

حيث أن :

s: طول القوس ، وللدائرة الكاملة $s = 2\pi R$.

R : نصف قطر الدائرة .

$\vec{\theta}$: الإزاحة الزاوية ، والإزاحة الزاوية لدورة كاملة تساوي $\vec{\theta} = \frac{2\pi R}{R} = 2\pi rad$ ، وأيضا $\vec{\theta} = n.2\pi$

حيث (n) تمثّل عدد الدورات (Number of Revolutions) .

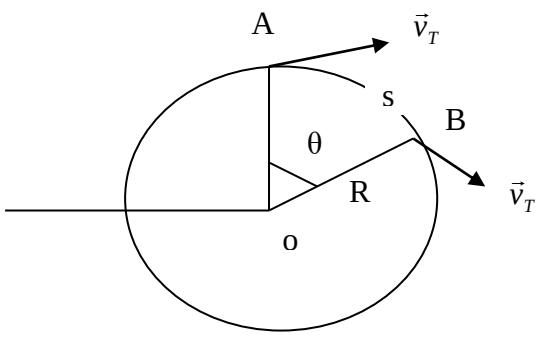
إذا أخذنا المشتقة بالنسبة للزمن بالنسبة للمعادلة (4 – 19) ينتج :

$$\frac{ds}{dt} = R\frac{d\vec{\theta}}{dt}$$

حيث أن ($\frac{ds}{dt}$) هي قيمة السرعة الخطية والتي تكون مماسية لمحيط الدائرة وسنرمز لها بالرمز ($\vec{v}_T$) ،

أما المقدار ($\frac{d\vec{\theta}}{dt}$) فهي قيمة السرعة الزاوية ($\vec{\omega}$) ، أي أن :

$$\vec{v}_T = R\vec{\omega} ...(20-4)$$



شكل (4– 1) : حركة جسم على محيط دائرة

إذا أخذنا المشتقة بالنسبة للزمن للمعادلة (4 – 20) ينتج :

$$\frac{d\vec{v}_T}{dt} = R\frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

حيث أن ($\frac{d\vec{v}_T}{dt}$) يمثّل التعجيل الخطي المماسي ($\vec{a}_T$) أما المقدار ($\frac{d\vec{\omega}}{dt}$) فإنه يمثّل التعجيل الزاوي ($\vec{\alpha}$)، أي أن :

$$\boxed{\vec{a}_T = R\vec{\alpha}...(21-4)}$$

إن التعجيل الزاوي ($\vec{\alpha}$) يساوي صفرا إذا كان إنطلاق الجسم على محيط الدائرة ثابت المقدار وهذا يعني أن التعجيل الزاوي ينتج عن التغيّر في مقدار السرعة الخطية أو الزاوية .

ومن البديهي أن إتجاه السرعة في الحركة الدائرية يتغيّر من نقطة إلى أخرى وتغيّر الإتجاه ينتج عنه تعجيل آخر هو التعجيل المركزي ($\vec{a}_R$) :

$$\boxed{\vec{a}_R = \frac{\vec{v}^2}{R} = \vec{\omega}^2 R...(22-4)}$$

في الحالة التي لا يكون فيها الإنطلاق ثابتا (السرعة متغيّرة) فإن الجسم الدائري في دائرة يتأثر بتعجيلين ، أولهما تعجيل مماسي ($\vec{a}_T$) والآخر تعجيل مركزي متجه نحو مركزها ($\vec{a}_R$) ، وأن تعجيل الجسم في هذه الحالة هو محصلة التعجيلين (المماسي والمركزي) :

$$\boxed{\vec{a} = \sqrt{(\vec{a}_T)^2 + (\vec{a}_R)^2}...(23-4)}$$

ويعمل مع المماس الزاوية (θ) :

$$\boxed{\theta = \tan^{-1}\frac{\vec{a}_R}{\vec{a}_T}...(24-4)}$$

ملاحظة عامة : الجدول التالي يبين المقابلة بين متغيّرات الحركتين الخطية والدورانية :

المتغيّر	الحركة الخطية	الحركة الدورانية
الإزاحة	$\vec{x}$	$\vec{\theta}$
السرعة	$\vec{v}$	$\vec{\omega}$
التعجيل	$\vec{a}$	$\vec{\alpha}$

مثال : يدور قرص بسرعة ($8.16 rad/s$) ثم يأخذ بالتباطؤ إلى أن يتوقف بعد (6 دورات) ، أوجد قيمة التعجيل الزاوي ؟

الحل :

قبل البدء بحل المثال يتم كتابة المعطيات والمجاهيل الواردة في منطوق المثال .

$$n = 6rev \text{ ، } \vec{\omega} = 0 \text{ ، } \vec{\omega}_o = 8.16 rad/s \text{ , } \vec{\alpha} = ?$$

من المعادلة (4 – 17) :

$$\vec{\omega}^2 = \vec{\omega}_\circ^{\,2} + 2\vec{\alpha}\theta ...(17-4)$$

$$(0)^2 = (8.16)^2 + 2\vec{\alpha}(6x2\pi)$$

$$\vec{\alpha} = \frac{-(8.16)^2}{24\pi}$$

$$\boxed{\Rightarrow \vec{\alpha} = -0.884 rad/s^2}$$

يلاحظ الإشارة (-) كدليل على أن التعجيل تباطأ .

واجب بيتي : بدأ محرك كهربائي دورانه من السكون وبلغت سرعته الزاوية (1200 دورة في الدقيقة) بعد مضي (10 ثواني) ، إحسب :

1- مقدار التعجيل الزاوي للمحرك ؟

2- الإزاحة الزاوية للمحرك ؟

3- عدد الدورات الكلية للمحرك ؟

مثال : يدور دولاب بسرعة زاوية قدرها ($30 rev/s$) يتم إيقافه بتعجيل تباطئي ثابت حيث يدور الدولاب ($60 rad/s$) قبل أن يتوقف تماما ، أوجد :

1- التعجيل الزاوي للدولاب ؟

2- المدة الزمنية المنقضية قبل توقف الدولاب ؟

الحل :

قبل البدء بحل المثال يتم كتابة المعطيات والمجاهيل الواردة في منطوق المثال .

$$n = 60rev \text{ ، } \vec{\omega} = 0 \text{ , } \vec{\omega}_o = 30 rev/s$$

$$t_o = ? \text{ ، } \vec{\alpha} = ?$$

1 - لإيجاد التعجيل الزاوي للدولاب :

من المعادلة (4 – 17) :

$$\vec{\omega}^2 = \vec{\omega}_\circ^{\,2} + 2\vec{\alpha}\vec{\theta} ...(17-4)$$

$$(0)^2 = ((30)(2\pi))^2 + 2\vec{\alpha}(2\pi)(60) \Rightarrow \vec{\alpha} = \frac{-((30)(2\pi))^2}{2(2\pi)(60)}$$

$$\boxed{\Rightarrow \vec{\alpha} = -47\frac{rad}{s^2}}$$

2 - لإيجاد المدة الزمنية المنقضية قبل توقف الدولاب :

من المعادلة (4 – 11) :

$$\vec{\omega} - \vec{\omega}_\circ = \vec{\alpha}(t - t_\circ)...(11-4)$$

$$(0) - (30)(2\pi) = (-47)(0 - t_\circ)$$

$$-60\pi = -47t_o \Rightarrow t_o = \frac{-60\pi}{-47}$$

$$\boxed{\Rightarrow t_o = 4s}$$

مثـال : يبـدأ جسـم بالحركـة مـن السـكون علـى مسـار دائـري وإزدادت سـرعته بإنتظـام حتـى وصـلت (900 دورة في الدقيقة) خلال (15 ثانية) ، أوجد :

1- التعجيل الزاوي للجسم ؟

2- التعجيل الخطي المماسي للجسم إذا كان نصف قطرمساره (0.2 متر) ؟

3- عدد الدورات التي يدورها ذلك الجسم خلال تلك الفترة ؟

الحل :

قبل البدء بحل المثال يتم كتابة المعطيات والمجاهيل الواردة في منطوق المثال .

$$R = 0.2m \text{ ، } t = 15\sec \text{ ، } \vec{\omega} = 900revl\min \text{ ، } t_o = 0 \text{ , } \vec{\omega}_o = 0$$

$$n = ? \text{ ، ، } \vec{a}_T = ? \text{ ، } \vec{\alpha} = ?$$

$$\vec{\omega} = \frac{(numberofcycles)x(2\pi)}{t}\frac{rad}{s}$$

$$\vec{\omega} = \frac{(900)x(2\pi)}{60}$$

$$\boxed{\therefore \vec{\omega} = 30\pi\frac{rad}{s}}$$

1 - التعجيل الزاوي للجسم :

$$\vec{\alpha}_{av} = \frac{(\vec{\omega} - \vec{\omega}_\circ)}{(t - t_\circ)}...(5-4)$$

$$\vec{\alpha} = \frac{(\vec{\omega} - \omega_o)}{t} = \frac{30\pi - 0}{15}$$

$$\boxed{\vec{\alpha} = 2\pi \frac{rad}{s^2}}$$

2 - التعجيل الخطي المماسي للجسم :

من المعادلة (4 – 21) :

$$\vec{a}_T = R\vec{\alpha}...(21-3)$$

$$\vec{a}_T = (0.2)x(2\pi) \Rightarrow \vec{a}_T = 0.4\pi \frac{m}{s^2}$$

$$\boxed{\therefore \vec{a}_T = 1.256 \frac{m}{s^2}}$$

3 - عدد الدورات التي يدورها الجسم خلال تلك الفترة :

من المعادلة (4 – 15) :

$$\vec{\theta} = \vec{\omega}_\circ t + \frac{1}{2}\vec{\alpha}t^2...(15-4)$$

$$\vec{\theta} = (0)(15) + \frac{1}{2}(2\pi)(15)^2$$

$$\therefore \vec{\theta} = 225\pi Radian$$

$$\because n = \frac{\theta}{2\pi} \Rightarrow n = \frac{225\pi}{2\pi}$$

$$\boxed{\therefore n = 112.5 revolutions}$$

واجب بيتي : دولاب دائري نصف قطره ($0.3m$) يدور بسرعة إبتدائية مقدارها ($150 rev.\min^{-1}$) ، فإذا نقصت سرعته بإنتظام حتى توقف في زمن مقداره ($20s$) . أوجد :

1- التسارع الزاوي للدولاب الدائري ؟

2- الإزاحة الزاوية التي تحرّكها الدولاب حتى توقف ؟

3- التسارع العمودي (المركزي) لنقطة عند حافة الدولاب بعد ثانيتين من بدء الحركة ؟

4- التسارع المماسي (الخطي) لنقطة عند حافة الدولاب ؟

5- محصلة التسارعيين العمودي والمماسي ؟