الفصل الرابع

الحركة الدورانية (Rotational Movement)

1-4 المقدمة (Introduction)

ترجع أهمية دراسة الحركة الدورانية للأجسام نظرا لوجود مثل هذه الحركة في الطبيعة كحركة الأجرام السماوية (الكواكب والنجوم) في مسارات دائرية تقريبا ، وكذلك حركة الإلكترونات حول الأنوية في الذرات .

في البداية سنتعرّف على متغيّرات (Variables) الحركة الدورانية ، ومن ثم سندرس معادلات هذه الحركة بسرعة زاوية (Angular Velocity) ثابتة وبتعجيل زاوي (Angular Acceleration) ثابت كما كان الحال في دراسة الحركة الخطية ، ومن ثم ندرس العلاقة بين متغيّرات الحركة الدورانية والخطية .

2-4 متغيّرات الحركة الدورانية (Variables of Rotational Motion)

عند دراسة الحركة الخطية تطرقنا إلى متغيرات هذه الحركة وهي الإزاحة ، السرعة والتعجيل ، وبالمثل فإنه عند وصف الحركة الدورانية فإننا سوف نستخدم المفاهيم وهي الإزاحة الزاوية (Angular Displacement) و السرعة الزاوية (Angular Velocity) والتعجيل الزاوي (Angular Acceleration) .

1-2-4 الإزاحة الزاوية (Angular Displacement)

إذا تحرّك جسم حول محور ثابت من النقطة ($\vec{\theta}_o$) إلى النقطة ($\vec{\theta}$) فالمتجه الواصل بينهما يسمى بالإزاحة الزاوية (Angular Displacement) ويُرمز لها ($\Delta\vec{\theta}$) وهي كمية متجهة ، ومقدارها تساوي :

$$\boxed{\Delta\vec{\theta} = \vec{\theta} - \vec{\theta}_o Radian(rad) ...(1-4)}$$

إن وحدة الإزاحة الزاوية تسمى (الراديان – Radian - نصف قطرية) وتختصر (rad) ، حيث أن :

$$\boxed{\pi.(rad) = 180^\circ ...(2-4)}$$

وعليه فإن :

$$1rad \approx 57^\circ$$

2-2-4 السرعة الزاوية (Angular Velocity)

تُعرّف السرعة الزاوية ($\vec{\omega}$) عندما يدور الجسم ويقطع إزاحة زاوية ($\Delta\vec{\theta}$) من ($\vec{\theta}_\circ$) إلى ($\vec{\theta}$) خلال فترة زمنية (Δt) من (t_o) إلى (t) ، أي أنها النسبة بين تغيّر الإزاحة الزاوية والتغيّر في الزمن ، وتُقاس السرعة الزاوية بوحدة (rad/s) :

$$\boxed{\vec{\omega}_{av}=\frac{(\vec{\theta}-\vec{\theta}_{\circ})}{(t-t_{\circ})}=\frac{\Delta\vec{\theta}}{\Delta t}(rad/s)...(3-4)}$$

أما السرعة الزاوية اللحظية (Instantaneous Angular Velocity) فهي السرعة الزاوية الناتجة عند لحظة زمنية قصيرة (dt) :

$$\boxed{\vec{\omega}_{in}=\frac{d\vec{\theta}}{dt}...(4-4)}$$

3-2-4 التعجيل الزاوي (Angular Acceleration)

بنفس الطريقة إذا كانت سرعة الجسم الزاوية عند النقطة ($\vec{\theta}_{\circ}$) هي ($\vec{\omega}_{o}$) وسرعته الزاوية عند النقطة ($\vec{\theta}$) هي ($\vec{\omega}$) فإن التعجيل الزاوي في هذه الحالة تساوي :

$$\boxed{\vec{\alpha}_{av}=\frac{(\vec{\omega}-\vec{\omega}_{\circ})}{(t-t_{\circ})}=\frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}(rad/s^{2})...(5-4)}$$

أما التعجيل الزاوي اللحظي (Instantaneous Angular Acceleration) فهو التعجيل الزاوي الناتج عند لحظة زمنية قصيرة (dt) .

$$\boxed{\vec{\alpha}_{in}=\frac{d\vec{\omega}}{dt}=\frac{d}{dt}(\frac{d\vec{\theta}}{dt})=\frac{d^{2}\vec{\theta}}{dt^{2}}...(6-4)}$$

3-4 أنواع الحركة الدورانية الخاصة (Types of Special Rotational Motion)

1-3-4 الحركة الدورانية بسرعة زاوية ثابتة

(Rotational Movement With Constant Angular Velocity)

عندما يكون الجسم في حركة ذات سرعة منتظمة حول محور ثابت تكون سرعته الزاوية ثابتة ، أي أن :

$$\vec{\omega}=cons\tan t$$

$$\vec{\omega}=\frac{d\vec{\theta}}{dt}\Rightarrow\vec{\omega}dt=d\vec{\theta}$$

$$\int_{\theta_{\circ}}^{\theta}d\vec{\theta}=\int_{t_{\circ}}^{t}\vec{\omega}dt=\vec{\omega}\int_{t_{\circ}}^{t}dt$$

$$\boxed{\vec{\theta}-\vec{\theta}_{\circ}=\overline{\omega}(t-t_{\circ})...(7-4)}$$

عندما $t_o = 0$ تصبح المعادلة (4- 7) كالآتي :

$$\boxed{\vec{\theta} = \vec{\theta}_\circ + \vec{\omega}t ...(8-4)}$$

عندما $\vec{\theta}_o = 0$ تصبح المعادلة (4- 8) كالآتي :

$$\boxed{\vec{\theta} = \vec{\omega}t ...(9-4)}$$

2-3-4 الحركة الدورانية بتعجيل زاوي ثابت

(Rotational Movement With Constant Angular Acceleration)

عندما يتحرّك الجسم بسرعة زاوية ($\vec{\omega}$) متغيّرة ، فإن الجسم سوف يتحرّك بتعجيل زاوي ($\vec{\alpha}$) الذي يعرّف بكونه معدّل تغيّر السرعة الزاوية في وحدة الزمن أي أن :

$$\boxed{\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \Rightarrow d\vec{\omega} = \vec{\alpha}dt ...(10-4)}$$

$$\boxed{\int_{\omega_\circ}^{\omega} d\vec{\omega} = \int_{t_\circ}^{t} \vec{\alpha}dt \Rightarrow \vec{\omega} - \vec{\omega}_\circ = \vec{\alpha}(t - t_\circ) ...(11-4)}$$

عندما $t_o = 0$ تصبح المعادلة (4- 11) كالآتي :

$$\boxed{\vec{\omega} = \vec{\omega}_\circ + \vec{\alpha}t ...(12-4)}$$

$$\because \vec{\theta} = \vec{\theta}_\circ + \vec{\omega}t ...(8-4)$$

$$\vec{\theta} = \vec{\theta}_\circ + \int_{t_\circ}^{t} \vec{\omega}dt$$

$$\vec{\theta} = \vec{\theta}_\circ + \int_{t_\circ}^{t} [\vec{\omega}_\circ + \vec{\alpha}(t - t_\circ)]dt$$

$$\boxed{\vec{\theta} = \vec{\theta}_\circ + \vec{\omega}_\circ (t - t_\circ) + \frac{1}{2}\vec{\alpha}(t - t_\circ)^2 ...(13-4)}$$

عندما $t_o = 0$ تصبح المعادلة (4- 13) كالآتي :

$$\boxed{\vec{\theta} = \vec{\theta}_\circ + \vec{\omega}_\circ t + \frac{1}{2}\vec{\alpha}t^2 ...(14-4)}$$

عندما $\vec{\theta}_o = 0$:

$$\boxed{\vec{\theta} = \vec{\omega}_{\circ} t + \frac{1}{2}\vec{\alpha} t^2 ...(15-4)}$$

وكما نعلم أن :

$$\vec{\alpha} = \frac{\vec{\omega} - \vec{\omega}_{\circ}}{t - t_o}$$

$$\boxed{t = \frac{\vec{\omega} - \vec{\omega}_{\circ}}{\vec{\alpha}} ...(16-4)}$$

نعوّض قيمة (t) في المعادلة (4 – 15) فنحصل على :

$$\vec{\theta} = \frac{\vec{\omega}^2 - \vec{\omega}_{\circ}^{\ 2}}{2\vec{\alpha}}$$

ومنها نحصل على :

$$\boxed{\vec{\omega}^2 = \vec{\omega}_{\circ}^{\ 2} + 2\vec{\alpha}\vec{\theta} ...(17-4)}$$

مثال : بدأ محرك كهربائي دورانه من السكون بسرعة زاوية قدرها ($36 rad/s$) أثناء فترة زمنية مقدارها ($6s$) إحسب :

1- التعجيل الزاوي للمحرك ؟

2- الإزاحة الزاوية التي يقطعها المحرك ؟

الحل :

قبل البدء بحل المثال يتم كتابة المعطيات والمجاهيل الواردة في منطوق المثال .

$$t = 6s ، \ \vec{\omega} = 36 rad/s ، \ t_o = 0 \ , \ \vec{\omega}_o = 0$$

$$\vec{\theta} = ? ، \ \vec{\alpha} = ?$$

1 - من المعادلة (4 – 12) :

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_{\circ} + \vec{\alpha} t ...(12-4)$$

$$36 = 0 + \alpha 6 \Rightarrow \alpha = \frac{36}{6}$$

$$\boxed{\Rightarrow \alpha = 6 rad/s^2}$$

2 - من المعادلة (4 – 15) :

$$\vec{\theta} = \vec{\omega}_{\circ} t + \frac{1}{2}\vec{\alpha} t^2 ...(15-4)$$

$$\vec{\theta} = (0)(6) + \frac{1}{2}(6)(6)^2$$

$$\boxed{\Rightarrow \vec{\theta} = 108 rad}$$