4-2-1 تساوي المتجهات (Equality of Vectors)

إذا كان :

$$\vec{A}=\vec{B}$$

فإن :

$$\vec{A}-\vec{B}=0$$

أي أن :

$$(A_x-B_x)\hat{i}+(A_y-B_y)\hat{j}+(A_z-B_z)\hat{k}=0$$

أي أن :

$$A_x-B_x=0$$
$$A_y-B_y=0$$
$$A_z-B_z=0$$

وبذلك فإن :

$$A_x=B_x$$
$$A_y=B_y$$
$$A_z=B_z$$

مما سبق نستنتج بأنه يُمكن أن يتساوى المتجهان إذا كانت مُركباتهما المتقابلة متساوية .

$\boxed{\text{مثال}}$: أوجد قيم كل من x , y , z والتي تجعل المتجهين الآتيين متساويين :

$$\vec{A}=\hat{i}+2\hat{j}+3z\hat{k}$$

$$\vec{B}=(x-3)^2\hat{i}+y\hat{j}+\hat{k}$$

$\boxed{\text{الحل}}$:-

بما أنه المطلوب أن يتساوى المتجهان أي أن :

$$\vec{A}=\vec{B}$$

وأن :

$$\hat{i}+2\hat{j}+3z\hat{k}=(x-3)^2\hat{i}+y\hat{j}+\hat{k}$$

وبالتالي يتساوى المركبات المتقابلة للمتجهين :

$$1=(x-3)^2$$

$$2=y$$

$$3z=1$$

وعليه فإن :

$$\boxed{x=4}$$

$$\boxed{y=2}$$

$$\boxed{z = \frac{1}{3}}$$

5-2-1 ضرب المتجهات (Multiplication of Vectors)

يُوجد هُناك نوعان من ضرب المتجهات وهما : -

1-5-2-1 الضرب القياسي للمتجهات (Dot or Scalar product of Vectors)

يعرّف الضرب القياسي كالتالي :

$$\boxed{\vec{A}.\vec{B} = |A||B|\cos\theta ...(9-1)}$$

حيث أن :-

$|A|$: مقدار المتجه $\vec{A}$.

$|B|$: مقدار المتجه $\vec{B}$.

θ : الزاوية الصغرى بين المتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ أو إمتدادهما وتُحسب من العلاقة الآتية :

$$\boxed{\theta = \cos^{-1}\frac{\vec{A}.\vec{B}}{|A||B|} ...(10-1)}$$

لإيجاد الضرب القياسي $\vec{A}.\vec{B}$ بدلالة مركباتهما فإننا نُعوض عن $\vec{A}$ و $\vec{B}$ كما يلي :

$$\vec{A}.\vec{B} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}).(B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k})$$

$$\boxed{\vec{A}.\vec{B} = A_xB_x\hat{i}.\hat{i} + A_xB_y\hat{i}.\hat{j} + A_xB_z\hat{i}.\hat{k} + A_yB_x\hat{j}.\hat{i} + A_yB_y\hat{j}.\hat{j} + A_yB_z\hat{j}.\hat{k} + A_zB_x\hat{k}.\hat{i} + A_zB_y\hat{k}.\hat{j} + A_zB_z\hat{k}.\hat{k} ...(11-1)}$$

وبتطبيق تعريف الضرب القياسي على متجهات الوحدة الأساسية نجد أن :

$$\hat{i}.\hat{i} = \hat{j}.\hat{j} = \hat{k}.\hat{k} = 1$$

بينما

$$\hat{i}.\hat{j} = \hat{i}.\hat{k} = \hat{j}.\hat{i} = \hat{j}.\hat{k} = \hat{k}.\hat{i} = \hat{k}.\hat{j} = 0$$

وعليه فإن المعادلة (1- 11) تأخذ الصيغة التالية :

$$\boxed{\vec{A}.\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z ...(12-1)}$$

ملاحظة :- يتضح لنا بأنه في حالة الضرب القياسي :

$$\boxed{\vec{A}.\vec{B}=\vec{B}.\vec{A}}$$

مثال : إذا كان :

$$\vec{A}=\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k}$$

$$\vec{B}=3\hat{i}-4\hat{k}$$

إحسب : -

1- الزاوية بين المتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ ؟

2- الزاوية بين المتجه $\vec{A}$ ومحور (x) الموجب ؟

الحل :-

1 - بإستخدام المعادلة (1- 10) :

$$\theta=\cos^{-1}\frac{\vec{A}.\vec{B}}{|A||B|}...(10-1)$$

لغرض حساب قيمة الزاوية (θ) بين المتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ يجب حساب قيمة كل من ($\vec{A}.\vec{B}$) و ($|A||B|$) وكالآتي :

من المعادلة (1 – 12) :

$$\vec{A}.\vec{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z...(12-1)$$

$$\vec{A}.\vec{B}=(1)(3)+(2)(0)+(-2)(-4)$$

$$\boxed{\vec{A}.\vec{B}=11}$$

من المعادلة (1- 4) بالنسبة للمتجه $\vec{A}$:

$$|\vec{A}|=\sqrt{A_x{}^2+A_y{}^2+A_z{}^2}$$

$$|\vec{A}|=\sqrt{(1)^2+(2)^2+(-2)^2}$$

$$\boxed{|\vec{A}|=3units}$$

أما بالنسبة للمتجه $\vec{B}$:

$$\left|\vec{B}\right| = \sqrt{{B_x}^2 + {B_y}^2 + {B_z}^2}$$

$$\left|\vec{B}\right| = \sqrt{(3)^2 + (0)^2 + (-4)^2}$$

$$\boxed{\left|\vec{B}\right| = 5units}$$

$$\boxed{\therefore \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right| = 15units}$$

وبتعويض القيم الناتجة أعلاه في المعادلة (1 – 10) نحصل على :

$$\theta = \cos^{-1}\frac{11}{15}$$

قيمة الزاوية بين المتجهين $\boxed{\theta = 42.8^\circ}$

$\boxed{2}$ - لإيجاد الزاوية بين المتجه $\vec{A}$ ومحور (x) الموجب ، فإننا بحاجة إلى متجهين أحدهما $\vec{A}$ والآخر في إتجاه (x) الموجب حتى نتمكن من تطبيق المعادلة (1 – 10) ، وليكن ($\hat{i}$) .

وعليه فإن المعادلة (1 – 9) تصبح :

$$\vec{A}.\hat{i} = |A|.\left|\hat{i}\right|\cos\theta$$

إذن :

$$\theta = \cos^{-1}\frac{\vec{A}.\hat{i}}{|A|.\left|\hat{i}\right|}$$

من المعادلة (1 – 12) :

$$\vec{A}.\vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z ...(12-1)$$

$$\vec{A}.i = (1)(1) + (2)(0) + (-2)(0)$$

$$\boxed{\vec{A}.\hat{i} = 1}$$

من الفرع الأول $\boxed{\left|\vec{A}\right| = 3}$:

$$\theta = \cos^{-1}\frac{1}{3}$$

قيمة الزاوية بين المتجه $\vec{A}$ ومحور (x) الموجب $\boxed{\theta = 70.5^\circ}$