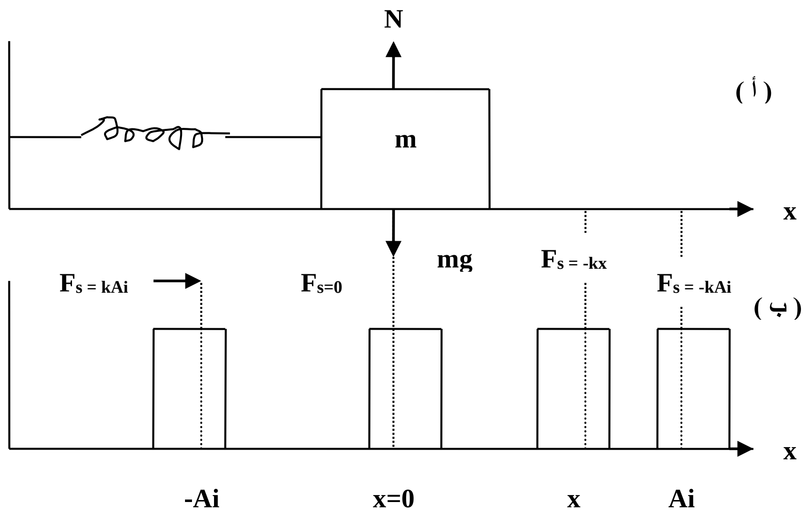
5-5 تطبيقات على الحركة التوافقية البسيطة (Applications of Simple Harmonic Motion)

1-5-5 حركة جسم مربوط بنابض (Object Connected to a Spring)

في هذا التطبيق تعتبر كتلة الجسم متجمعة في نقطة واحدة ويتحرّك الجسم في خط مستقيم ، وهذا التطبيق عبارة عن جسم كتلته (m) يتحرّك على سطح أفقي أملس (لا يوجد إحتكاك) بسبب تأثير نابض ثابته (k) مربوط بالجسم كما موضّح في الشكل (5 – 2) .



شكل (5-2) : جسم كتلته (m) يتحرّك على سطح أفقي بتأثير قوة نابض ثابتة (k) مربوط بالجسم

الشكل (5 – 2 أ) يمثل النابض عند طوله الطبيعي وعند هذه الحالة تكون قوة النابض صفرا ويكون مجموع القوى التي تؤثر على الجسم مساوية للصفر أيضا .

ويبيّن الشكل (59 – 2 ب) المحور الهندسي لتعريف موقع الجسم أثناء الحركة ، ويشير أيضا إلى أقصى مسافة يتحرّكها الجسم على محور السينات وهي معرّفة بالموقعين ($x = \pm A\hat{i}$) .

بما أن قوة النابض عند أية نقطة هي($F_s = -kx$) فإن قوة النابض المؤثرة على الجسم عند نهايتي الحركة هي :

$F_s = -kA\hat{i}$ عند الموقع $(x = A\hat{i})$

$F_s = kA\hat{i}$ عند الموقع $(x = -A\hat{i})$

$F_s = 0\hat{i}$ عند الموقع $(x = 0\hat{i})$

وبشكل عام :

$F_s = -kx$ عند أي موقع (x)

إن القوى الخارجية التي تؤثر على الجسم تتمثل بكل من قوة النابض (F_s) وقوة جذب الأرض (mg) ورد فعل السطح الأملس (N) ، وبسبب عدم حركة الجسم في الإتجاه الرأسي فإن محصلة القوتين (mg) و (N) تساوي صفرا ، وبهذا فإن القوة التي تسبب الحركة هي (F_s) التي تساوي محصلة الثلاثة قوة وتعمل بالإتجاه الأفقي على محور السينات .

بعد أن تمّ إختيار المحاور فسنطبق بعدها قانون نيوتن الثاني على حركة الجسم فينتج :

$$F_s = -kx = ma$$

إذن :

$$\boxed{a = -\frac{k}{m}x \ldots (8-5)}$$

وبالتعويض عن قيمة التسارع (a) ينتج :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

لاحظ أن المعادلة الأخيرة هي معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية والحل لها سيحتوي ثابتين يتم معرفتهما من قيمة موقع وسرعة الجسم عند ($t = 0$) ، كما أن الحل سيحتوي أيضا الثابت الثالث وهو ($\frac{k}{m}$) الذي يصف الجسم من خلال كتلته (m) والقوة من خلال ثابت النابض (k) .

ولنفرض أن حل المعادلة التفاضلية (5– 8) هو المعادلة (5 – 1) ، وعند تعويض المعادلة (5 – 1) في المعادلة (5 – 8) ينتج :

$$-w^2 + \frac{k}{m} = 0$$

أو

$$\boxed{w = \sqrt{k/m} \ldots (9-5)}$$

إذن فالحل للمعادلة (5– 8) هو المعادلة (5 – 1) شريطة أن تكون قيمة ($w = \sqrt{k/m}$) وحركة الجسم هي حركة إهتزازية من النوع البسيط (أي حركة توافقية بسيطة) .

مثال : جسم كتلته ($0.25kg$) مربوط بنابض أثرت قوة خارجية مقدارها ($10N$) لإزاحة الجسم ($0.1m$) عن نقطة إتزانه ، بعدها تمّ رفع تأثير هذه القوة فبدأ الجسم يتحرّك حركة توافقية بسيطة ، أوجد :

1- ثابت النابض ؟

2- زمن الذبذبة ؟

3- سرعة وتسارع الجسم العظميان ؟

4- سرعة وتسارع الجسم عندما يكون موقع الجسم ($x = 0.05im$) ؟

الحل :

1 - لإيجاد ثابت النابض :

بما أن الجسم كان ساكنا تحت تأثير القوة الخارجية وقوة النابض ، إذن :

$$10 = kx$$

وبالتعويض بقيمة (x) ينتج :

$$10 = k.(0.1)$$

$$\boxed{k = 100N.m^{-1}}$$

2 - لإيجاد زمن الذبذبة :

بما أن :

$$T = \frac{2\pi}{w}$$

$$w = \sqrt{k/m} ...(9-5)$$

إذن :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

وبالتعويض بقيمة (m كتلة الجسم) و (k ثابت النابض) ينتج :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{0.25}{100}}$$

$$\boxed{\Rightarrow T = 0.314s}$$

3 - لإيجاد سرعة وتسارع الجسم العظميان :

تعطى السرعة العظمى بالمعادلة :

$$v_m = \pm Awi ...(5-5)$$

$$v_m = \pm 0.1\sqrt{\frac{k}{m}}i$$

$$v_m = \pm 0.1\sqrt{\frac{100}{0.25}}i$$

$$\boxed{v_m = \pm 2\hat{i} ms^{-2}}$$

أما القيمة العظمى للتسارع فتعطى بالمعادلة :

$$a_m = \pm A w^2 i ...(7-5)$$

$$a_m = \pm 0.1(\sqrt{\frac{k}{m}})^2 i$$

$$a_m = \pm 0.1(\sqrt{\frac{100}{0.25}})^2 i$$

$$a_m = \pm 0.1.\frac{100}{0.25} i \boxed{\Rightarrow a_m = \pm 40 m.s^{-2}}$$

4 - لإيجاد سرعة وتسارع الجسم عندما يكون موقع الجسم ($x = 0.05im$) :

سرعة الجسم :

نطبّق في معادلة الحركة التالية لإيجاد سرعة الجسم :

$$\boxed{v^2 = w^2 (A^2 - x^2)...(10-5)}$$

$$v^2 = \frac{100}{0.25}((0.1)^2 - (005)^2)$$

$$\boxed{v = \pm\sqrt{3} im.s^{-1}}$$

تسارع (تعجيل) الجسم :

نطبّق في معادلة الحركة التالية لإيجاد تعجيل الجسم :

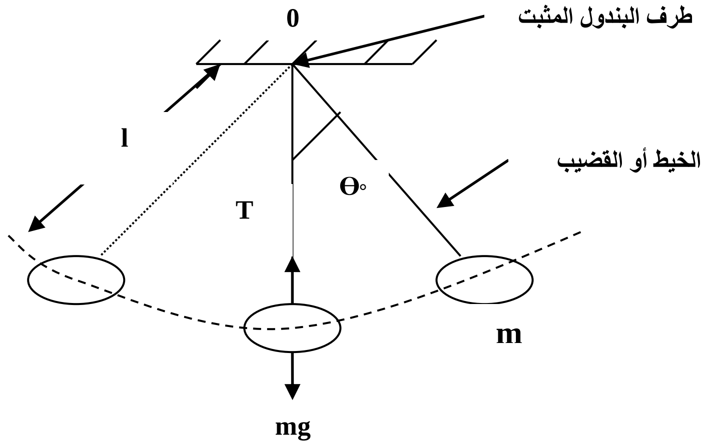
$$\boxed{a = -w^2 x...(11-5)}$$

$$a = -\frac{100}{0.25}.(0.05)\hat{i}$$

$$\boxed{a = 20\hat{i} m.s^{-2}}$$

2-5-5 حركة البندول البسيط (The Simple Pendulum)

يعرّف البندول البسيط بأنه عبارة عن ثقل مقداره (m) معلّق بخيط أو قضيب طوله (l) وطرفه الآخر مثبت ويتحرّك حركة إهتزازية كما هو موضّح في الشكل (5 – 3) .



شكل (3-5) : البندول البسيط

يعتبر الثقل (m) متجمّع في نقطة وتتحرّك هذه النقطة على قوس من دائرة مركزها الطرف المثبت (o) ومحور الدوران في هذا التطبيق هو عبارة عن الخط العمودي على الدائرة والمار بالنقطة (o) ، كما نفترض أن كتلة الخيط أو القضيب أقل بكثير من كتلة الثقل وعلى هذا الأساس فأنها ستهمل في إجراء الحسابات ، وكذلك فإن حركة الكتلة (m) هي حركة دائرية وموقع الجسم يعرف من خلال الموقع الزاوي θ () Angular Position .

إن القوى الخارجية التي تؤثر على الكتلة (m) تتمثل بكل من قوة جذب الأرض ($m.g$) وإتجاهها عموديا إلى الأسفل ، وقوة الشد في الخيط (T) وإتجاهها نحو مركز الدوران ونهمل القوى التي يؤثر بها الهواء على الجسم أثناء حركته ، ، لذلك عن تطبيق قانون نيوتن الثاني لحركة هذا الجسم يجب حساب مجموع عزوم القوى حول محور الدوران المؤثرة عليه ، وبالتالي نحصل على المعادلة الآتية :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{l}{g}\theta = 0$$

وهذه معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية حلها يشبه حل المعادلة (5 – 8) بشرط يتم إستبدال الموقع الخطي (x) بالموقع الزاوي (θ) ، والثابت ($w = \sqrt{k/m}$) في حالة جسم مربوط بنابض بالثابت ($w = \sqrt{l/g}$) في حالة البندول البسيط حيث l : طول البندول و g : التعجيل الأرضي ، فينتج :

$$\boxed{w = \sqrt{l/m} ...(12-5)}$$

6-5 معادلات الحركة للبندول البسيط (Motion Equations For Simple Pendulum)

أولا : **معادلة الموقع الزاوي** (θ) :

إن المعادلة الآتية تمثل حركة توافقية بسيطة ، فيها كل من ($\theta_\circ$) هما الإزاحة الزاوية (أقصى مسافة زاوية يتحركها الجسم عن نقطة الإتزان وتعرف بسعة الذبذبة) ، وثابت الطور (ϕ) على الترتيب ويمكن إيجاد قيمتهما من معرفة موقع وسرعة الجسم عن بداية الحركة ($t=0$) .

$$\boxed{\theta = \theta_o \cos(wt+\phi)\hat{\theta}...(13-5)}$$

والقيمة العظمى لطول متجه الموقع (θ_m) تساوي :

$$\boxed{\theta_m = \frac{\theta}{\hat{\theta}} = \theta_\circ...(14-5)}$$

ثانيا : معادلة السرعة الزاوية W(t) :

عندما نفاضل المعادلة (5 – 13) ينتج :

$$\boxed{W = -\theta_o w \sin(wt+\phi)\hat{\theta}...(15-5)}$$

والقيمة العظمى للسرعة الزاوية (W_m) تساوي :

$$\boxed{W_m = \pm w\theta_o...(16-5)}$$

ثالثا : معادلة السرعة كدالة للموقع :

إن معادلة السرعة الزاوية كدالة للموقع يمكن كتابتها كالآتي :

$$\boxed{W^2 = w^2(\theta_o{}^2 - \theta^2)...(17-5)}$$

رابعا : معادلة التسارع $a_{(t)}$:

عندما نفاضل المعادلة (5 – 15) ينتج :

$$\boxed{a_{(t)} = -\theta_o w^2 \cos(wt+\phi)\hat{\theta}...(18-5)}$$

والقيمة العظمى للتسارع الزاوي (a_m) تساوي :

$$\boxed{a_m = w^2\theta_o...(19-5)}$$

مثال : جسم كتلته ($0.4kg$) مربوط بخيط على شكل بندول بسيط طوله ($1.6m$) ، إذا كان طول القوس الذي يتحرّك عليه الجسم ($10cm$) ، إذا علمت أن التعجيل الأرضي يساوي ($10m/s^2$) أوجد :

1- تردد الجسم ؟

2- سعة الذبذبة ؟

3- السرعة الزاوية العظمى ؟

4- أكبر تسارع زاوي ؟

5- سرعة الجسم عندما يكون الجسم عند الموقع ($\theta = 5x10^{-3} rad$) ؟

الحل :

1 - لإيجاد تردد الجسم :

$$w = 2\pi f = {}^{2\pi}\!/_{T} = \sqrt{l/g}$$

$$2\pi f = \sqrt{l/g}$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{l/g}$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{1.6/10}$$

$$\boxed{\Rightarrow f = 0.06Hz}$$

2 - لإيجاد سعة الذبذبة :

إن سعة الذبذبة كمية موجبة دائما وتساوي :

$$\theta_o = \frac{5x10^{-2}}{1.6}$$

$$\boxed{\theta_o = 3.125x10^{-2}\,rad}$$

3 - لإيجاد السرعة الزاوية العظمى :

$$W_m = \pm w\theta_o ...(16-5)$$

$$W_m = \sqrt{\frac{l}{g}}\theta_o$$

$$W_m = \sqrt{\frac{1.6}{10}}(3.125x10^{-2})$$

$$\boxed{W_m = 1.25x10^{-2}\,rad.s^{-1}}$$

4 - لإيجاد أكبر تسارع زاوي :

$$a_m = w^2\theta_o ...(19-5)$$

$$a_m = (\sqrt{\frac{1.6}{10}})^2 (3.125x10^{-2})$$

$$\boxed{a_m = 5x10^{-3} rads^{-2}}$$

5 - لإيجاد سرعة الجسم عندما يكون الجسم عند الموقع ($\theta = 5x10^{-3} rad$) :

$$W^2 = w^2(\theta_o^{\ 2} - \theta^2)...(17-5)$$

$$W^2 = \left[(\sqrt{\frac{1.6}{10}})^2 ((3.125x10^{-2})^2 - (5x10^{-3})^2) \right]$$

$$W^2 = 152.25x10^{-6}$$

$$\boxed{W = \pm 12.34x10^{-3} rad.s^{-1}}$$

القيمة الموجبة والسالبة للسرعة الزاوية تعني أن إتجاه السرعة للجسم إما إلى أعلى أو إلى أسفل الموقع .