وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة تكريت - كلية العلوم
قسم الفيزياء

الفيزياء الرياضية
المحددات

استاذ دكتورة عواطف صابر جاسم

المحددات والمعادلات الخطية
(قاعدة كرامر)

يوجد هنالك أنواع من المحددات وسوف نتكلم عن نوعين من المحددات وهي

محددات من الدرجة الثانية — محددات من الدرجة الثالثة

أولاً: محددات من الدرجة الثانية: نحاول أن نجد زوجين من الأعداد (x,y) (مجهولين) يحققان المعادلة الخطية

شكل المعادلات

$$a_1x + b_1y = c_1 \quad \text{---} \quad (1)$$

$$a_2x + b_2y = c_2 \quad \text{---} \quad (2)$$

* خطوات الحل

1- نوجد محدد المعاملات ونرمز له بـ Δ عن طريق معاملات الـ (x,y)

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 \quad \text{---} \quad (*)$$

2- نوجد محدد المعاملات بالنسبة لـ (x) وهو عبارة عن استبدال معاملات (x) بالثوابت (c_1, c_2).

$$\Delta_x \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - b_1c_2 \quad \text{---} \quad (*)$$

3- نوجد محدد المعاملات بالنسبة لـ (y) بنفس الطريقة السابقة وذلك باستبدال معاملات (y) بالثوابت (C_1, C_2)

$$\Delta y = \begin{vmatrix} a_1 & C_1 \\ a_2 & C_2 \end{vmatrix} = a_1 C_2 - C_1 a_2 \quad \text{---} \circledast$$

4- نوجد المجاهيل (x, y) من خلال القوانين

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} \quad , \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta} \quad \text{---} \circledast$$

مثال: باستخدام المحددات أوجد قيمة x , y (طريقة كرامر)؟

$$2x + 3y - 7 = 0 \quad , \quad 3x - 5y - 1 = 0$$

الحل/ نضع المعادلات في الصورة القياسية (2) (1)

$$2x + 3y = 7 \quad , \quad 3x - 5y = 1$$

نوجد المحدد العام.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = (2 \times -5) - (3 \times 3) = -10 - 9$$

$$= \boxed{-19}$$

نوجد المحدد بالنسبة لـ x

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = (7 \times -5) - (3 \times 1) = -35 - 3$$

$$= \boxed{-38}$$

الآن نوجد المحدد بالنسبة لـ y

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (2\times1) - (7\times3)$$

$$= 2 - 21 = \boxed{-19}$$

الآن نجد x, y

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-38}{-19} = 2$$

و.ه.م.ه

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{-19}{-19} = 1$$

ثانياً: محددات من الدرجة الثالثة

تتم بنفس خطوات المحددات من الدرجة الثانية

وذلك من خلال: 1- نوجد المحدد العام له ما ونرمز له Δ

2- نوجد محدد المعاملات بالنسبة لـ x وذلك باستبدال معاملات x بالثوابت (c_1, c_2, c_3) (d_1, d_2, d_3)

3- نوجد محدد المعاملات بالنسبة لـ y وذلك باستبدال معاملات (y) بالثوابت (d_1, d_2, d_3)

4- نوجد محدد المعاملات بالنسبة لـ (z) وذلك باستبدال معاملات (z) بالثوابت (d_1, d_2, d_3)

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} \quad , \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$$

ثم نجد المجاهيل

$$z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$$

شكل المعادلات العام

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \quad \text{---} (1)$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \quad \text{---} (2)$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \quad \text{---} (3)$$

مثال: أوجد x, y, z من المعادلات

$$-2x + 3y + 5z = 0$$

$$3x + z = 6 + 2y$$

$$x + 4y - 3z = 8$$

نكتب المعادلات بالصورة القياسية

$$-2x + 3y + 5z = 0$$

$$3x - 2y + z = 6$$

$$x + 4y - 3z = 8$$

الخطوة الأولى نوجد محدد العام Δ

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & y & z \\ -2 & 3 & 5 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow -2\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -2[6-4] - 3[-9-1] + 5[12+2]$$

$$= -4 + 30 + 70 = \boxed{96} \quad \Delta \neq 0 \text{ شرط أن}$$

نوجد محددات بالنسبة لـ (X)

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 5 \\ 6 & -2 & 1 \\ 8 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 8 & -3 \end{vmatrix}$$

$$+5\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = 5[6-4] - 3[-18-8]$$

$$+5[24+16]$$

$$= 10 + 78 + 200 = \boxed{288}$$

نوجد محددات بالنسبة لـ (Y)

$$\Delta y = \begin{vmatrix} x & 5 & z \\ -2 & 5 & 5 \\ 3 & 6 & 1 \\ 1 & 8 & -3 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 8 & -3 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$+5\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = -2[-18-8] - 5[-9-1]$$

$$+5[24-6]$$

$$= 52 + 50 + 90 = \boxed{192}$$

الآن نوجد المحدد بالنسبة لـ z

$$\Delta z = \begin{vmatrix} x & y & d \\ -2 & 3 & 5 \\ 3 & -2 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= -2\begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -2[-16-24] - 3[24-6] + 5[12+2]$$

$$= 80 - 54 + 70 = \boxed{96}$$

الآن نجد المجاهيل x, y, z

$$\therefore x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{288}{96} = 3$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{192}{96} = 2$$

$$z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{96}{96} = 1$$ و.م.ع