جامعة تكريت
كلية العلوم
قسم الفيزياء

طرق رياضية
اسئلة وامثلة

استاذ دكتورة عواطف صابر جاسم

A/L

$3x - y + z = -3$
$x - 2y - 3z = 1$
$2x + 3y + z = 2$

$$D = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = 3\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (1)\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$D = 3(-2+9) + 1(1+6) + 1(3+4)$
$= 3(7) + 1(7) + 1(7)$
$= 21 + 7 + 7 = 35$

$$D_x = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow (-3)\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (1)\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$D_x = -3(7) + 7 + 7 = -21 + 14 = -7$

$\therefore x = \frac{D_x}{D} = \frac{-7}{35}$

$$D_y = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow 3\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$D_y = 3(7) + (-3)(7) + 0 = 21 - (21)$
$21 + 21 = 42$

$\therefore y = \frac{D_y}{D} = \frac{42}{35}$

(I)

تكملة

A/ ب

$$D_z = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} = 3\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + (-3)\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$Dz = 3(-4-3) + 1(2-2) - 3(3+4)$$

$$= -21 + 0 - 21 = -42$$

$$D_z = \frac{Dz}{D}$$

$$D_z = \frac{-42}{35}$$

لسنا فواصح

ب/ب (B/ب)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$ اثبت ان المعروف

[redacted]

[redacted] حل المعادلة

$$A^2 - 5A + 7I_2 = 0$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 9-1 & 3+2 \\ -3-2 & -1+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$5A = 5\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 5 \\ -5 & 10 \end{bmatrix}$$

$$7I = 7\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

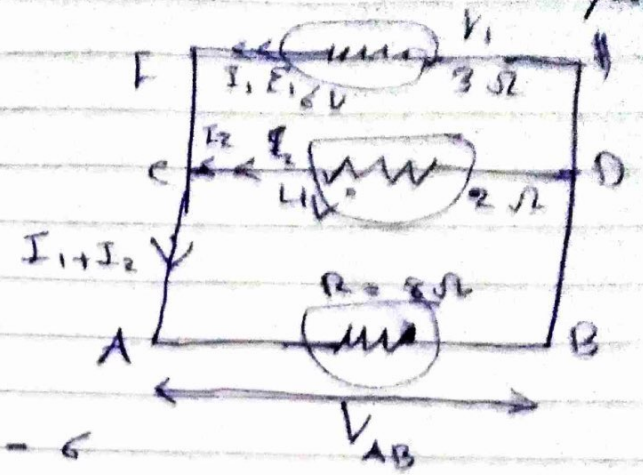
$$A^2 - 5A + 7I_2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 15 & 5 \\ -5 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 22 & 5 \\ -5 & 17 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -14 & 0 \\ 0 & -14 \end{bmatrix} = 0$$

مثال ٣: أوجد قراءة الفولتميتر



نطبق قانون كيرشوف للدائرة والتي هي

HFAB

$$3I_1 + 8(I_1 + I_2) = 6$$
$$3I_1 + 8I_1 + 8I_2 = -6$$
$$11I_1 + 8I_2 = -6 \quad \text{(1)}$$

والدائرة

DCAB

$$4 + I_2 + 8(I_2 + I_1) = -4$$
$$I_2 + 8I_2 + 8I_1 = -4$$
$$8I_1 + 9I_2 = -4 \quad \text{(2)}$$

$$\begin{vmatrix} 11 & 8 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 99 - 64 = \boxed{35}$$

$$\therefore I_1 = \frac{\begin{vmatrix} -6 & 8 \\ -4 & 9 \end{vmatrix}}{35} = \frac{-54 + 32}{35} = \frac{-22}{35} = -0.62\,A$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 11 & -6 \\ 8 & -4 \end{vmatrix}}{35} = \frac{-44 + 48}{35} \quad \frac{4}{35} = 0.114\,A$$

و سائل احصاري

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix},\ B\begin{bmatrix}1&2&1\\1&2&2\\2&1&2\end{bmatrix}\ /3$$

$$C=A\cdot B^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&2&1\\1&2&2\\2&1&2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & -(0-1)+1(1-0)+1(1-0)\} * \{2(2-2)+2(2-4)\\ & 4+(1-2)\end{bmatrix}$$

$$=(-1+1+1)*(2)+(4)+(-1)$$
$$=(1)*(-5)^{-1}=\boxed{-5}$$

(5)

ا) أ: وضّح مما يلي

/4

$$\frac{dy}{dx} + 2xy + xy^4 = 0 \quad , \quad \frac{dy}{dx}\sin x - y\cos x + y^2 = 0$$

2) $\frac{dy}{dx} + 2xy + xy^4 = 0$ بترتيب المعادلة

على شكل ④ ①

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = -xy^4$$

y هو y^4 و يجب أن

$n = 4$ نفرض أن

$$z = y^{1-n} = y^{1-4} = y^{-3} = \frac{1}{y^3} \quad ②$$

نشتق بالنسبة لـ x

$$\frac{dz}{dx} = -3y^{-4}\frac{dy}{dx}$$

$$= -3 \cdot \frac{1}{y^4} \cdot \frac{dy}{dx} \quad ③$$

بالرجوع إلى المعادلة ① ونقسم على y^4 ينتج

$$\frac{1}{y^4}\frac{dy}{dx} + 2x \cdot \frac{1}{y^3} = -x \quad ④$$

بمساواة ② ⇔ ④ و نعوضها كما لا z

في ③ (-3) ⑤

$$-\frac{1}{3}\frac{dz}{dx} + 2x \cdot z = -x$$

$$\frac{dz}{dx} - 6xz = 3x \quad ⑥$$

∴ المعادلة ⑥ هي معادلة خطية من الرتبة الأولى

نوجد عامل التكامل

$$I.F = \int f(x)\,dx = \int -6x = e^{-3x^2}$$

نضرب طرفي المعادلة ⑥ بـ e^{-3x^2} ينتج

$$\frac{dz}{dx} \cdot e^{-3x^2} - e^{-3x^2} \cdot 6xz = e^{-3x^2} \cdot 3x \quad ⑦$$

الطرف الأيسر هو حاصل مشتقة

ويكون

$$\int \frac{d}{dx}(e^{-3x^2} \cdot z) = \int e^{-3x^2} \cdot 3x\,dx$$

$$e^{-3x^2}z = \frac{+1}{2}\int e^{-3x^2} \cdot -6x\,dx$$

(6)

تابع
ص/4

$$e^{-3x^2} z = \frac{-1}{2} e^{-3x^2} + c \quad \text{---} \textcircled{8}$$

نعوض قيمة z وهناوي $\frac{1}{y^3}$

$$e^{-3x^2}\left(\frac{1}{y^3}\right) = \frac{-1}{2} e^{-3x^2} + c$$

وضع.

---

2) $\frac{dy}{dx} \sin x - y\cos x + y^2 = 0$

مرتب المعادلة

$\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} \sin x - y\cos x = -y^2 \quad \text{---} \textcircled{1}$$

على y^2 نقسم

$$z = y^{1-n} = y^{1-2} = y^{-1} = \frac{1}{y} \quad \text{نفرض} \quad n = 2$$

نشتق بالنسبة لـ x

$$\frac{dz}{dx} = -1\, y^{-2} \frac{dy}{dx} \Rightarrow -1 \frac{1}{y^2} \frac{dy}{dx} \quad \text{---} \textcircled{3}$$

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y\cos x}{\sin x} = \frac{-y^2}{\sin x}$$

$$\left[\frac{dy}{dx} - \cos x \cdot y = \frac{-1}{\sin} \cdot y^2\right] \div y^2$$

$$\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} - \cos x \cdot \frac{1}{y} = \frac{-1}{\sin x} \quad \text{---} \textcircled{5}$$

بالمعادلة ③ و ⑤

$$\left(\frac{dz}{dx} - \cos x \cdot z = \frac{-1}{\sin x} \quad \text{---} \textcircled{6}\right) \times (-1)$$

$$\frac{dz}{dx} + \cos x\, z = \frac{1}{\sin x} \quad \text{---} \textcircled{7}$$

هذه المعادلة

بتكملة

$$I.F = e^{\int p\,dx} = e^{\int \cot x\,dx} = e^{\int \frac{\cos x\,dx}{\sin x}}$$

$$= e^{\ln \sin x} = \boxed{\sin x}$$ نضرب عامل التكامل

$$\therefore \sin x \frac{dz}{dx} + \sin x \cdot \cos x\, z = \sin x \cdot \frac{1}{\sin x} \quad (8)$$

$$\int \frac{d}{dx}(\sin x \cdot z) = \int 1\,dx$$

الطرف الأيسر هو حاصل ضرب $\sin x$ في z والتكامل ينتج

$$\sin x \cdot z = x + c \quad (9)$$

نحول z من الفرضية، أي

$$\sin x \frac{1}{y} = x + c \quad (10)$$

رسنا مزاحم

(1/5)

$$(x+y-1)dx + (2x+2y+1)dy = 0$$

$$x+y-1\,dx = -(2x-2y-1)\,dy$$

نجعل المعادلة بهيئة $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y-1}{-2x-2y-1} \quad \text{---(1)}$$

نحدد معاملات x و y

$$a_1 = 1 \qquad b_1 = 1 \qquad c_1 = -1$$
$$a_2 = -2 \qquad b_2 = -2 \qquad c_2 = -1$$

نجد المحدد

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -2+2 = 0 \quad \text{---(2)}$$

نفرض $x+y = z-4$ ---(3)

$dx+dy = dz$ ---(4) نفرض $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 1 \quad \text{---(5)}$$

∴ تم تحويل هيئة السؤال بشكل $\frac{dy}{dx}$ فانه ينتج

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y-1}{-2x-2y-1} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{z-1}{-2z-1}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z-1}{2z-1} + 1 \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{z-1-2z-1}{-2z-1}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{-z-2}{-2z-1}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{-(z+2)}{-(2z+1)} \Rightarrow dx = \frac{2z+1}{z+2}\,dz \quad \text{---(6)}$$

بالتكامل ينتج

$$2z - 3\ln|z+2| = x + c \quad \text{---(7)}$$

نعوض عن z من (3)

$$2(x+y) - 3\ln|x+y+2| = x + c$$
$$2x + 2y - x - c = 3\ln|x+y+2|$$
$$x + 2y - c = 3\ln|x+y+2| \quad \text{---(8)}$$

و.د.م

(2) /5

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - 2y + 5}{2x + y - 1}$$

①
$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}$$

$a_1 = 1 \quad b_1 = -2 \quad c_1 = 5$
$a_2 = 2 \quad b_2 = 1 \quad c_2 = -1$

② نكون محدد بالهيئة الرياضية التالية ونستخرج قيمته

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (2 - (-4)) = 6$$

$6 \neq 0$

اذا قيمة المحدد كانت اي قيمة غير الصفر

③ نفرض دالتين هما h, k تكونان

$$\left.\begin{aligned} x &= u + h \\ y &= v + k \end{aligned}\right\} \quad ④$$

$$\left.\begin{aligned} dx &= du \\ dy &= dv \end{aligned}\right\} \quad ⑤$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du} \quad ⑥$$

بمساواة الطرف الايسر للمعادلة ① مع المعادلة

$$\frac{dv}{du} = \frac{x - 2y + 5}{2x + y - 1} \quad ⑦$$

نعوض القيم

$$\frac{dv}{du} = \frac{(u+h) - 2(v+k) + 5}{2(u+h) + (v+k) - 1}$$

$$\frac{dv}{du} = \frac{u + h - 2v - 2k + 5}{2u + 2h + v + k - 1}$$

$$= \frac{u - 2v + (h - 2k + 5)}{2u - v + (2h + k - 1)} \quad ⑧$$

(10)

5/ نعتبر المتتابعة (un) المعرفة بـ u0 = 2 و un+1 = (2un + 1)/(un + 2)

1) بين أن المتتابعة (un) ليست حسابية وليست هندسية.

2) نعتبر المتتابعة (vn) المعرفة بـ vn = (un − 1)/(un + 1)

أ) بين أن (vn) هندسية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول.

ب) اكتب vn بدلالة n ثم استنتج un بدلالة n.

ج) احسب lim un و lim Sn حيث Sn = u0 + u1 + ... + un

1) نبين أن (un) ليست حسابية:

u1 = (2u0 + 1)/(u0 + 2) = 5/4

u2 = (2u1 + 1)/(u1 + 2) = 14/13

u1 − u0 = 5/4 − 2 = −3/4

u2 − u1 = 14/13 − 5/4 = 9/52

u1 − u0 ≠ u2 − u1 إذن (un) ليست حسابية.

نبين أن (un) ليست هندسية:

u1/u0 = 5/8

u2/u1 = 28/65

u1/u0 ≠ u2/u1 إذن (un) ليست هندسية.

2) أ) نبين أن (vn) هندسية:

v0 = (u0 − 1)/(u0 + 1) = 1/3

v1 = (u1 − 1)/(u1 + 1) = 1/9

v1/v0 = 1/3

v2/v1 = 3/13

v1/v0 ≠ v2/v1 إذن (vn) ليست هندسية.

ب) نكتب vn بدلالة n ثم نستنتج un بدلالة n:

vn = (un − 1)/(un + 1)

vn(un + 1) = un − 1

vn un + vn = un − 1

vn un − un = −1 − vn

un(vn − 1) = −1 − vn

un = (−1 − vn)/(vn − 1)

un = (1 + vn)/(1 − vn)

un = (1 + (1/3)^n)/(1 − (1/3)^n)

ج) نحسب lim un و lim Sn حيث Sn = u0 + u1 + ... + un:

lim un = lim (1 + (1/3)^n)/(1 − (1/3)^n) = (1 + 0)/(1 − 0) = 1

Sn = u0 + u1 + ... + un

Sn = n + 2 + 2 ln(1/3^n − 1)

lim Sn = lim n + 2 + 2 ln(1/3^n − 1) = +∞