جامعة تكريت
كلية العلوم
قسم الفيزياء

محاضرة

متسلسلات فورييه

استاذ دكتورة عواطف صابر جاسم

متسلسلات فورييه

① بعض من قوانين المثلثات يتم الاستفادة منها في التحويلات

* $\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$

* $\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) + \cos(x+y)]$

* $\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x-y) + \sin(x-y)]$

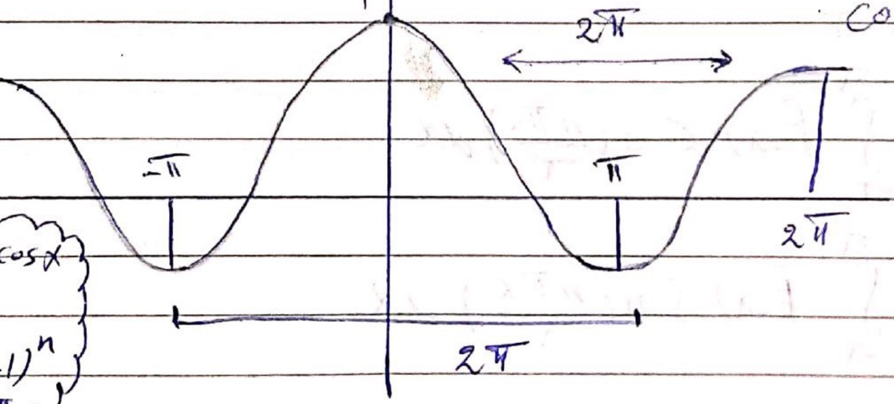
② * اذا كانت الدالة زوجية $f(x) = f(-x)$
وعندئذ تكون الدالة متماثلة حول محور y

* أما اذا كانت الدالة فردية $f(-x) = -f(x)$
وعندئذ تكون الدالة متماثلة حول نقطة الأصل

③ تعريف الدالة الدورية ؛ اذا كانت الدالة الدورية $f(x+2T) = f(x)$

ويكون الدور $2T$ والدور هو المسافة بين قمتين متتاليتين أو قاعين متتاليين ومثال على ذلك داله $\sin$, $\cos$

رسم داله $\cos$

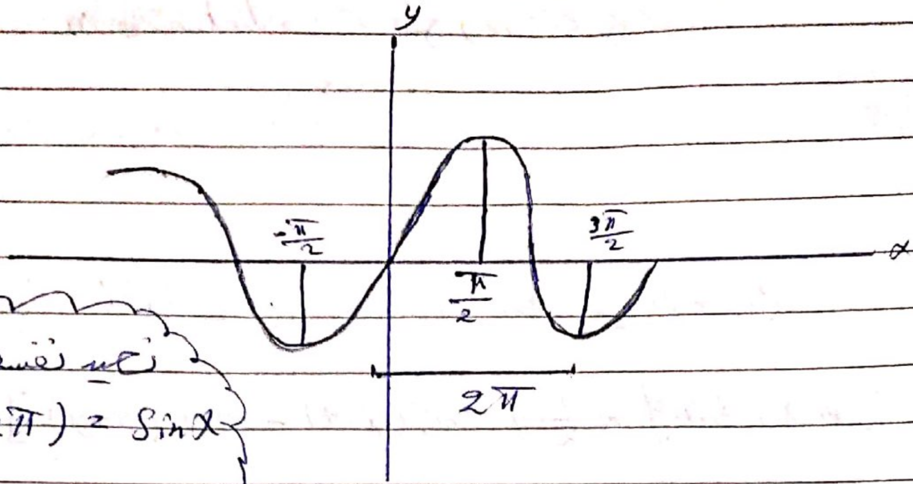


$\cos(x+2\pi) = \cos x$

$\cos(n\pi) = (-1)^n$

$n \in N$

رسم دالة sin



تعيد نفسها كل 2π

$\sin(x+2\pi) = \sin x$

$\therefore \sin(n\pi) = 0$

* متسلسلة فورييه : يمكننا أن ننشر اي دالة $f(x)$ بهذا الشكل

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right) \right]$$

حيث T دورية الدالة حيث $f(x)$ دالة دورية ودورها $2T$

نجد من هذه القانون $a_0 = ?$, $a_n = ?$, $b_n = ?$

نجد كل من a_0 , a_n , b_n من القوانين التالية

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} f(x)\, dx$$

$$a_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right) dx$$

$$b_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right) dx$$

ملاحظات مهمه جدا

* اذا كانت الداله متماثله حول محور y اي زوجيه $f(x)$
واذا كانت الداله زوجيه سيكون $b_n = 0$

لانه تكامل الداله الزوجيه للداله sin داله فرديه واذا كاملها
من $-T$ الى T ستنحصر مساحتين متساويتين
المساحه الاولى تحت محور x والمساحه الثانيه فوق
محور x وبالتالي ناتج سيكون صفر
ناتج التكامل سيكون صفر

في حين أن a_0 تقسم الى تكاملين بدلا من تكامل من
$-T$ الى T

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right)$$

أما اذا كانت الداله فرديه $f(x)$ سيكون

$$a_0 = a_n = 0$$

وعندئذ نطبق قوانين b_n

مثال أوجد متسلسلة فوريية للدالة $f(x) = x^2$

علماً أن الدالة محصورة بين $-1 < x < 1$

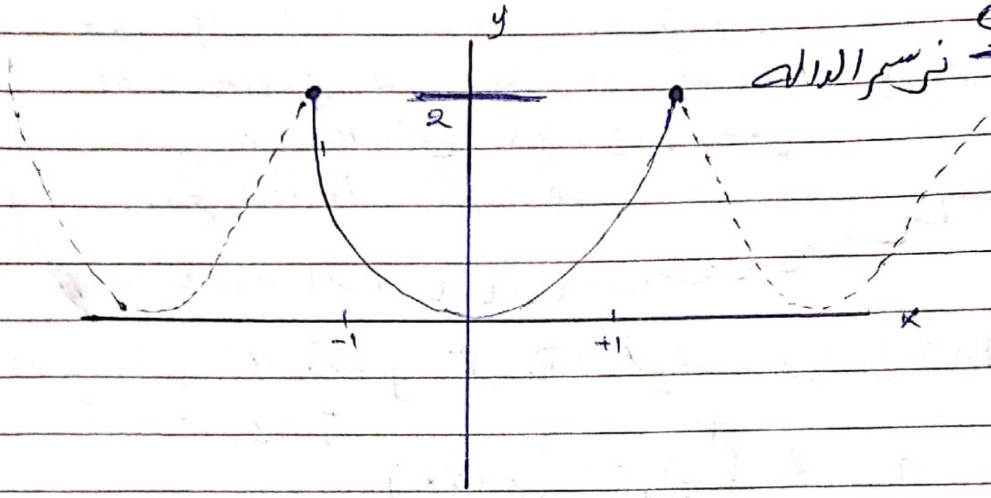
واستنتج أن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$

نعوض بالدالة

x	y
2	4
1	1
0	0
-1	1
-2	4

الحل

نرسم الدالة



الدالة زوجية $f(x) = x^2$

بما أن الدالة زوجية فيه $b_n = 0$

نكتب القانون $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right)]$

$b_n = 0$ الحركة يساوي الصفر

من $f(x+2) = f(x)$ $\quad 2T = 2 \Rightarrow T = 1$ الدورية

نجد a_0 وبما أن الدالة زوجية نستخدم هذا القانون

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\,dx = \frac{2}{1}\int_0^1 x^2\,dx = 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1$$

$$= 2\left[\frac{1}{3} - 0\right] = \boxed{\frac{2}{3}} = a_0$$

* نجد a_n

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T x^2 \cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right) dx$$

$$a_n = \frac{2}{1}\int_0^1 x^2 \cos\left(\frac{n\pi x}{1}\right) dx$$

هناك توصيف من التكامل التجزئة هو نفرض ال u ال dv و نستخدم تكامل السريع بالتجزئة

هنا نأخذ تكامل التجزئة السريع

أشتقها حتى احصل على قيمة الصفر

$+x^2$	$\cos(n\pi x)$
$-2x$	$\frac{\sin(n\pi x)}{n\pi}$
$+2$	$-\frac{\cos(n\pi x)}{n^2\pi^2}$
-0	$-\frac{\sin(n\pi x)}{n^3\pi^3}$

أكامل بعدها

الاشارات + - + - وهكذا

تجزئة

أقسم على معامل x وهنا اشتقها

موجب سالب سالب

$$a_n = 2\left[\frac{x^2}{n\pi}\sin(n\pi x) + \frac{2x}{n^2\pi^2}\cos(n\pi x) - \frac{2}{n^3\pi^3}\sin(n\pi x)\right]_0^1$$

$$= 2\left[\frac{(1)^2}{n\pi}\cancel{\sin(n\pi(1))} + \frac{2(1)}{n\pi^2}\cos(n\pi(1)) - \frac{2}{n^3\pi^3}\cancel{\sin(n\pi(1))}\right] - [0]$$

تساوي الصفر

من $\sin n\pi = 0$

من ملاحظات التي ذكرت أن $\sin n\pi = 0$

$$a_n = 2\left[\frac{2}{n^2\pi^2}\cos n\pi\right]$$

وأيضاً أن $\cos n\pi = (-1)^n$

$$a_n = \frac{4}{n^2\pi^2}(-1)^n$$

اعوض بالقانون كل من a_0 , a_n

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right) + \underbrace{b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right)}_{\text{تساوي صفر}} \Big]$$

$$x^2 = \frac{\frac{2}{3}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2\pi^2}(-1)^n \cos(n\pi x)$$

$$x^2 = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2\pi^2}(-1)^n \cos(n\pi x)$$

نحقق الاستنتاج او الاثبات

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

$$x^2 = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2\pi^2}(-1)^n \cos(n\pi x)$$

منطلق $-1 \leq x \leq 1$ - نأخذ مركز الفترة هو صفر $x=0$ اعوض مكان كل x صفر

$$0 = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2\pi^2}(-1)^n \cos 0 \qquad \boxed{\cos 0 = 1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2\pi^2}(-1)^n = \frac{-1}{3}$$

نضرب في $\frac{-\pi^2}{4}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^1(-1)^n}{n^2} = \frac{+\pi^2}{12}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

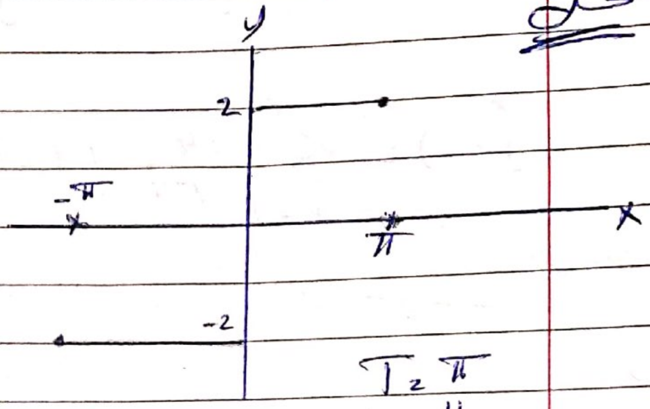
هو المطلوب

مثال أوجد متسلسلة فورير

$$f(x) = \begin{cases} 2 & 0 \leq x \leq \pi \\ -2 & -\pi \leq x \leq 0 \end{cases}$$

الحل

$f(x)$ فردية لأنها متماثلة حول نقطة الأصل



وبما أن الدالة فردية هذه يعني أن

$a_0 = a_n = 0$

$T = \pi$ الدورية

$$f(x) = \underbrace{\frac{a_0}{2}}_{\text{يساوي صفر}} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right)}_{\text{يساوي صفر}} + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right)$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right) \Rightarrow b_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{\pi}\right)\right]$$

بما أن فردي صفر تكامل

$$\therefore b_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} (-2)\sin(nx) + \int_{0}^{\pi} (2) \sin(nx)\, dx\right]$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[\left[2\frac{\cos(nx)}{n}\right]_{-\pi}^{0} + \left[-2\frac{\cos nx}{n}\right]_{0}^{\pi}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{2}{n} - \frac{2}{n}(-1)^n\right] + \left[\frac{-2}{n}(-1)^n - \frac{-2}{n}\right]$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{4}{n} - \frac{4}{n}(-1)^n\right.$$

$$= \frac{4}{\pi n}\left[1-(-1)^n\right]$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right] \sin nx$$

هديل علي عبدالله

متسلسلات فورييه

متسلسلات فوريية :- وهي متسلسلات تنتج تمثيل او نشر داله معينه بمتسلسه لانهايه دوال مثلثيه .

- بعض قوانين المثلثات المهمه

1- $\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$

2- $\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\{\cos(x-y) + \cos(x+y)\}$

3- $\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x-y) + \sin(x+y)]$

- قانون نشر المتسلسه الفوريية هو

$$\boxed{F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right)}$$

حيث $F(x)$ هي داله دوريه ودورها $(2T)$

لكي ننشر اي داله باستخدام متسلسلات فوريه نحتاج الى ايجاد $\boxed{a_0 = ?}$, $\boxed{a_n = ?}$ و $\boxed{b_n = ?}$

1- $a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} f(x)\, dx$

2- $a_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right) dx$

3- $b_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right) dx$

ملاحظات مهمه

1- نقول عن الداله $f(x)$ زوجيه اذا كان

$f(x) = f(-x)$

وعندئذ تكون الداله متماثله حول محور y

- واذا كانت الداله زوجيه فان $\boxed{b_n = 0}$

و $\boxed{a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\,dx}$

و $\boxed{a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right)dx}$

2- نقول عن الداله $f(x)$ فرديه اذا $f(-x) = -f(x)$

(اي تكون الداله متماثله حول نقطه الاصل)

واذا كانت الداله فرديه فان $\boxed{a_0 = a_n = 0}$

ونجد b_n فقط من خلال القانون

$\boxed{b_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right)dx}$

3- الداله الدوريه: نقول عن الداله انها دوريه اذا كان

$f(x+2T) = f(x)$

ويكون الدور $(2T)$ و T هو نصف الدور.

الدور: هو المسافه ما بين قمتين متتاليتين او قاعدتين متتاليتين.

$\boxed{\sin(n\pi) = 0}$ $n \in N$ ، $\boxed{\cos(n\pi) = (-1)^n}$, $n \in N$ عدد صحيح

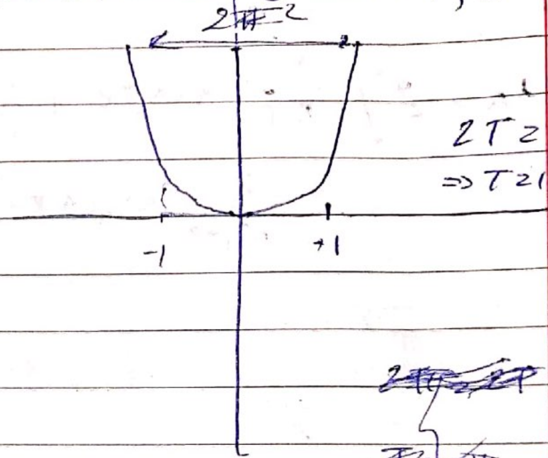
مثال 1 : اوجد متسلسله فوريه للداله

$f(x)=x^2 \quad , \quad -1\le x\le 1 \quad , \quad f(x+2)=f(x)$

وثم استنتج ان $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$

الحل

نرسم الداله



$f(x)=x^2$ الداله زوجيه

$b_n=0$

$2T=2$
$\Rightarrow T=1$

نكتب قانون متسلسله فوريه

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right)+\underbrace{\boxed{b_n\sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right)}}_{=0}$$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(\cos\frac{n\pi x}{T}\right)$$

$2T=2 \Rightarrow T=1$

$$a_0=\frac{2}{T}\int_0^T f(x)\,dx=\frac{2}{1}\int_0^1 x^2\,dx$$

$$=2\left\{\frac{x^3}{3}\right\}_0^1 \Rightarrow a_0=2\left\{\frac{(1)^3}{3}-\frac{(0)^3}{3}\right\}\Rightarrow \boxed{a_0=\frac{3}{2}}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right) dx$$

$$a_n = \frac{2}{1} \int_0^1 x^2 \cos\left(\frac{n\pi x}{1}\right) dx$$

$$a_n = 2 \int_0^1 x^2 \cos(n\pi x)\, dx \quad \} \rightarrow$$ تكامل جزئي

$$a_n = 2 \left[\frac{x^2}{n\pi} \sin(n\pi x) + \frac{2x}{n^2\pi^2} \cos(n\pi x) - \frac{2}{n^3\pi^3} \sin(n\pi x) \right]_0^1$$

$+x^2$	$\cos n\pi x$
	$\downarrow$ تكامل
$-2x$	$\frac{\sin n\pi x}{n\pi}$
$+2$	$-\frac{\cos n\pi x}{n^2\pi^2}$
-0	$-\frac{\sin n\pi x}{n^3\pi^3}$

$$a_n = 2 \left\{ \underbrace{\frac{x^2}{n\pi} \sin(n\pi)}_{zero} + \frac{2x}{n^2\pi^2} \cos(n\pi) - \frac{2}{n^3\pi^3} \sin n\pi \right\}$$

$\boxed{\sin n\pi = 0}$

$\boxed{\cos n\pi = (-1)^n}$

$$a_n = 2 \left[\frac{2(1)}{n^2\pi^2} \underbrace{\cos n\pi}_{(-1)^n} \right]$$

$$a_n = 2 \left\{ \frac{2}{n^2\pi^2} (-1)^n \right\} \Rightarrow \boxed{a_n = \frac{4}{n^2\pi^2} (-1)^n}$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right) dx$$

$$f(x) = \frac{\frac{2}{3}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2\pi^2} (-1)^n \cos(n\pi x)$$

$$x^2 = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2\pi^2} (-1)^n \cos(n\pi x)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$ الاثبات =

$$x^2 = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2\pi^2} (-1)^n \cos(n\pi x)$$

$-1 \le x \le 1$ نأخذ مركز الفترة $x = 0$

$$(0)^2 = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2\pi^2} (-1)^n \underbrace{\cos(n\pi(0))}_{\cos(0) = 1}$$

$$0 = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2\pi^2} (-1)^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2\pi^4} (-1)^n = -\frac{1}{3} \qquad -\frac{\pi^2}{4}$$ نضرب الطرفين

$$\sum_{n=1}^{\infty} -\left(\frac{1}{n^2}\right)^1 (-1)^n = -\frac{1}{3} \cdot \frac{-\pi^2}{4}$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}}$$ تم الاثبات ✓

مثال 2 : اوجد متسلسلة فوريه للدالة

$$f(x) = x \qquad -\pi \le x \le \pi$$

حيث f هي دالة دورية ذات دورة (2π)

$$2T = 2\pi \Rightarrow \boxed{T = \pi}$$

الدالة فردية $f(x) = x$

فان $\boxed{a_0 = a_n = 0}$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{T} + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right)$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right)$$

$$b_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\underbrace{x}_{\text{فردي}}\ \underbrace{\sin(nx)}_{\text{فردي}}}_{\text{زوجي}}\, dx$$

ملاحظة : تكامل اي دالة فردية معرفة على فترة متناظرة يساوي صفر

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

وتكامل اي دالة زوجية على فترة متناظرة يساوي ضعف التكامل المعرف على نصف المسافة من الفترة

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x \sin(nx)\,dx$$

نكامل تكامل جزئي

$+$	x	$\sin nx$
$-$	1	$-\frac{\cos nx}{n}$
$+$	0	$-\frac{\sin nx}{n^2}$

-/-

$$b_n = \frac{2}{\pi}\left\{\left[-\frac{x}{n}\cos nx + \frac{1}{n^2}\sin(nx)\right\}\right.$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\left\{-\frac{x}{n}\cos nx\right\}_0^{\pi} + \left\{\frac{2}{n^2\pi}\sin(nx)\right\}_0^{\pi}$$

$\boxed{\sin n\pi = 0}$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\left\{-\frac{\pi}{n}\left\{\cos n\pi - \frac{0}{n}\cos(0)\right\} + \left[\frac{2}{n^2}\pi\sin(n\pi) - \frac{2}{n^2\pi}\sin(0)\right]\right\}$$

$\cos n\pi = (-1)^n$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\left\{\frac{-\pi}{n}\cos n\pi\right\}$$

$$b_n = \frac{2}{n}(-1)^1(-1)^n = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}(-1)^{n+1}\sin nx}$$

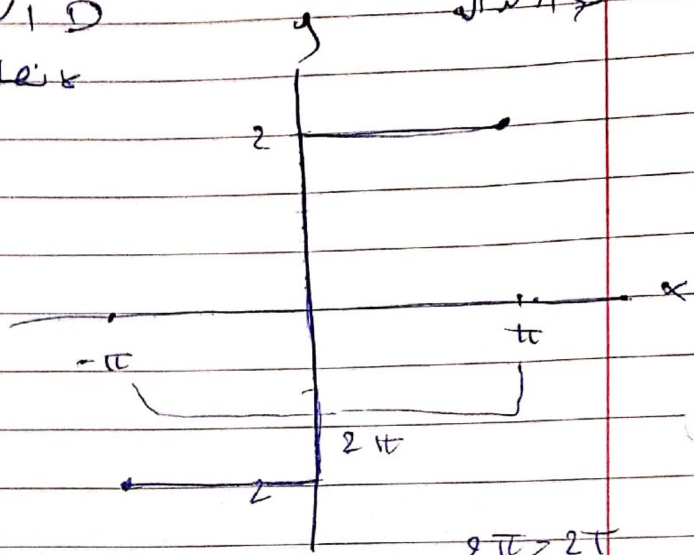
مثال 3 اوجد متسلسلة فورير للدالة

$$f(x) = \begin{cases} 2 & 0 \le x \le \pi \\ -2 & -\pi \le x \le 0 \end{cases}$$

الحل
نرسم الدالة

$f(x) =$ الدالة فردية
لانها متماثلة حول نقطة الاصل

$a_0 = a_n =$ صفر



$2\pi = 2T$

$\boxed{T = \pi}$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right)$$

$$b_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} \left(f(x) \sin\frac{n\pi x}{T}\right) dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} (-2)\sin\frac{n\cancel{\pi} x}{\cancel{\pi}}\,dx + \int_{0}^{\pi} 2\sin\left(\frac{n\cancel{\pi} x}{\cancel{\pi}}\right) dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -2\sin(nx)\,dx + \int_{0}^{\pi} 2\sin(nx)\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left\{2\frac{\cos nx}{n}\right\}_{-\pi}^{0} + \left\{+2\frac{\cos nx}{n}\right\}_{0}^{\pi}$$

$\sin = -\cos$
$\cos = \sin$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{2}{n} - \frac{2}{n}(-1)^n\right\} + \left\{\frac{+2}{n}(-1)^n - \frac{2}{n}\right\}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{4}{n} - \frac{4}{n}(-1)^n\right\} = \frac{4}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right)$$

$$\boxed{F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n\pi}\left((-1)^n\right) \sin(nx)}$$

الاسم:- نور اسماعيل محمد

مقدمة :-

* متطابقات الضرب وتحويلها الى الجمع

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) - \cos(x+y)\right)$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) + \cos(x+y)\right)$$

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\left(\sin(x-y) + \sin(x-y)\right)$$

* نقول عن الدالة انها زوجية اذا كان

$f(x) = f(-x)$ (حيث انها تكون متماثلة حول محور y)

ونقول انها فردية

$f(-x) = -f(x)$ (حيث انها تكون متماثلة حول نقطة الاصل)

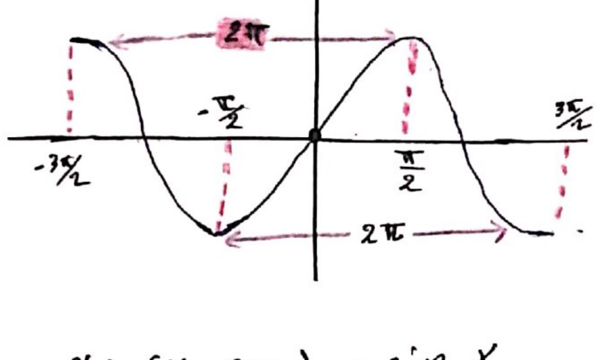
$-f(-x) = f(x)$

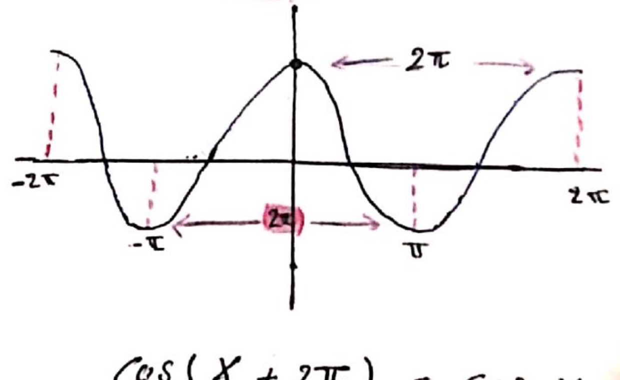
* نقول عن الدالة انها دورية اذا كان

$f(x+2T) = f(x)$ (حيث ان الدور هو $2T$)

note

الدور:- هو المسافة بين قمتين متتاليتين او قعرين متتاليين





$\sin(x+2\pi) = \sin x$ $\qquad$ $\cos(x+2\pi) = \cos x$

$\therefore \sin(n\pi) = 0$ $\qquad$ $\therefore \cos(n\pi) = (-1)^n \quad n \in N$

نور اسماعيل محمد

متسلسلة فورييه

طريقة الحل :-

1) نكتب قانون متسلسلة فورييه والذي هو :-

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right) \right]$$

حيث $f(x)$ داله دورية دورها $2T$

2) نوضح فيما اذا كانت الدالة زوجية او فردية

تكون زوجية :- في هذه الحالة فإن $b_n = 0$ ونجد فقط a_n و a_0

والتي تعطى حسب العلاقات :-

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(x)\, dx$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right)$$

اما اذا كانت فردية :- في هذه الحالة $a_0 = a_n = 0$ ونجد b_n فقط

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right)$$

تفسير هذه النقطة :-

كما نعلم ان داله ال $\cos$ هي داله زوجية حيث انها متماثلة حول محور y لهذا وجدنا a_n (كونها مضروبة في $\cos$)

اما a_0 فقد توجب ايجادها كونه الداله الثابتة توازي محور x واي شيء يوازي محور x كداله ثابتة يعتبر متماثل حول محور y وبهذا يكون داله زوجية

في الحاله الثانية تكون الداله فردية وجدنا b_n فقط لانها مضروبة في $\sin x$ وحيث

ex 1/ Find the Fourier series for $f(x) = \begin{cases} -x & \text{if } -\pi < x < 0 \\ x & \text{if } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$

$T = \pi$

sole

1) نكتب القانون العام

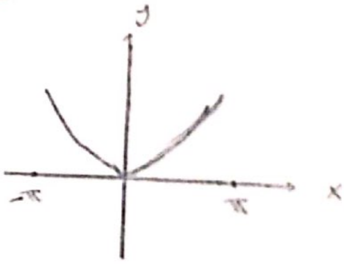
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right) \right]$$

2) نتحقق من كون الدالة زوجية او فردية (بتعويض مكان كل X ب -X

$$f(-x) = \begin{cases} x & -\pi < -x < 0 \\ -x & 0 \leq -x \leq \pi \end{cases}$$

نضرب الفترة في -1 للتخلص من $-x$ التي في الوسط

$$f(-x) = \begin{cases} x & \pi < x < 0 \text{ بالترتيب } \pi > x > 0 \Rightarrow 0 < x < \pi \\ -x & 0 < x < -\pi \text{ بالترتيب } -\pi < x < 0 \end{cases}$$



اي ان $f(-x) = f(x)$ فإن الدالة زوجية ومتماثلة حول محور y

بهذا نحسب a_0 و a_n وان $b_n = 0$

3)

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(x)\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \, dx \Rightarrow \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi^2}{2}\right] = \pi = a_0$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right) dx \Rightarrow \underbrace{\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx \, dx}$$

نحل اما بطريقة الـ udv واما بطريقة التكامل السريع

u		dv
x	(+)	$\cos nx$
1	(−)	$\frac{\sin nx}{n}$
0		$-\frac{\cos nx}{n^2}$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{x \sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2} \right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi \sin n\pi}{n} + \frac{\cos n\pi}{n^2} - 0 - \frac{1}{n^2} \right]$$

$\because \sin n\pi = 0$ $\quad \cos(n\pi) = (-1)^n$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{n^2}(-1)^n - \frac{1}{n^2} \right] = \frac{2}{n^2 \pi}\left[(-1)^n - 1\right] = a_n$$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2 \pi}\left[(-1)^n - 1\right] \cos nx$$

نور اسماعيل محمد

اذا كانت الداله ليست فردية ولا زوجية

نجد a_0 و a_n و b_n وحسب العلاقات التالية

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} f(x) \, dx$$

$$a_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right) dx$$

$$b_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right) dx$$

3) نعوض في قانون متسلسلة فورية ونجد الصيغة الاخيرة للمعادلة .

نور اسماعيل محمد

ex 2/ Find the Fourier series for $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{if } -\pi \leq x < 0 \\ 1 & \text{if } 0 < x < \pi \end{cases}$

$T = \pi$

1) نكتب القانون

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right) \right]$$

2) نتحقق من الدالة

$$f(-x) = \begin{cases} -1 & \text{if } -\pi < -x < 0 \quad * -1 \\ 1 & \text{if } 0 < -x < +\pi \quad * -1 \end{cases}$$

$$f(-x) = \begin{cases} -1 & \text{if } 0 < x < \pi \\ 1 & \text{if } -\pi < x < 0 \end{cases}$$

$\therefore f(-x) \neq f(x)$

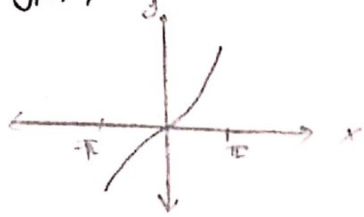
الدالة ليست زوجية

$$-f(-x) = \begin{cases} 1 & \text{if } 0 < x < \pi \\ -1 & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

$\therefore -f(-x) = f(x)$

اي ان الدالة فردية

ومتماثلة حول نقطة الاصل



بما ان الدالة فردية فإننا سوف نجد b_n فقط وان $a_0 = a_n = 0$

3)

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right) dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (1) \sin nx \, dx \Rightarrow = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi}$$

سحبنا سالب كعامل مشترك

$$= \frac{2}{n\pi}\left[-\cos n\pi + \cos 0\right] \Rightarrow = -\frac{2}{n\pi}\left((-1)^n - 1\right) = b_n$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right)$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2}{n\pi}\left((-1)^n - 1\right) \sin(nx)$$

ex3/ Find fourier series for $f(x) = x+1$, $-\pi < x < \pi$

$T = \pi$

Sol

1) نكتب القانون العام

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right) \right]$$

2) نتحقق من الدالة

$f(x) = x+1$

$f(-x) = -x+1$ الدالة ليست زوجية

$-f(-x) = x-1$ الدالة ليست فردية

∴ الدالة ليست زوجية ولا فردية يعني يجب ان نجد a_0 , b_n , a_n

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} f(x)\, dx = \frac{1}{T} \left[\int_{-T}^{0} f(x)\, dx + \int_{0}^{T} f(x)\, dx \right]$$

$$\Rightarrow a_0 = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{0} (x+1)\, dx + \int_{0}^{\pi} (x+1)\, dx \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\left[\frac{x^2}{2} + x\right]_{-\pi}^{0} + \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_{0}^{\pi} \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[0 + 0 - \cancel{\frac{\pi^2}{2}} + \pi + \cancel{\frac{\pi^2}{2}} + \pi \right]$$

$$= \frac{2\cancel{\pi}}{\cancel{\pi}} = 2 = a_0$$

$$a_n = \frac{1}{T} \left[\int_{-T}^{0} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right) dx + \int_{0}^{T} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right) dx \right]$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{0} (x+1) \cos(nx)\, dx + \int_{0}^{\pi} (x+1) \cos(nx)\, dx \right]$$

نور سهايل محمد

$u = x+1 \qquad dv = \cos(nx)\, dx$

$du = 1 \qquad v = \frac{\sin nx}{n}$

$\because \int u\, dv\, dx = uv - \int v\, du\, dx$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{\pi}\Bigg[\underbrace{\frac{(x+1)\sin(nx)}{n}\Bigg]_{-\pi}^{0} - \int_{-\pi}^{0} \frac{\sin nx}{n}\, dx + \frac{(x+1)\sin(nx)}{n}\Bigg]_{0}^{\pi}} - \int_{0}^{\pi} \frac{\sin nx}{n}\, dx \Bigg]$$

قيمة هذا الحد تساوي صفر عند تعويض $0, \mp\pi$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n^2}\cos nx \Big]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{n^2}\cos nx \Big]_{0}^{\pi} \right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\cancel{\frac{1}{n^2}} - \cancel{\frac{1}{n^2}\cos n\pi} + \cancel{\frac{1}{n^2}\cos n\pi} - \cancel{\frac{1}{n^2}} \right]$$

$$= \frac{1}{\pi}[0] \Rightarrow a_n = 0$$

$$b_n = \frac{1}{T}\left[\int_{-T}^{0} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right) dx + \int_{0}^{T} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right) dx \right]$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[\underbrace{\int_{-\pi}^{0} (x+1)\sin\frac{n\cancel{\pi} x}{\cancel{\pi}}\, dx + \int_{0}^{\pi} (x+1)\sin\left(\frac{n\pi x}{\pi}\right) dx} \right]$$

تحل اما بطريقة udv او بالتكامل السريع
وسوف نحل هذه الان بطريقة التكامل السريع

u	dv
$x+1$	$\sin nx$
1	$-\frac{\cos nx}{n}$
0	$-\frac{\sin nx}{n^2}$

$\otimes$ $\ominus$

نور اسماعيل محمد

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[\left[-\frac{(x+1)\cos nx}{n} - \underbrace{\frac{\sin nx}{n^2}}\right]_{-\pi}^{0} + \left[-\frac{(x+1)\cos nx}{n} - \underbrace{\frac{\sin nx}{n^2}}\right]\right.$$

هذه الحدين تهمل لانه عند التعويض بـ 0 او $\pm\pi$
يكون ناتج $\sin = 0$

وبسحب $\frac{1}{n}$ عامل مشترك من الطرفين وتوزيع $\cos nx$ على $(x+1)$

$$b_n = \frac{-1}{n\pi}\left[\left[x\cos nx + \cos nx\right]_{-\pi}^{0} + \left[x\cos nx + \cos nx\right]_{0}^{\pi}\right]$$

$$= \frac{-1}{n\pi}\left[0 + \cancel{1} + \pi\cos n\pi - \cancel{\cos n\pi} + \pi\cos n\pi + \cancel{\cos n\pi} - 0\right.$$

$$= -\frac{2\pi}{n\pi}\cos(n\pi)$$

$$\Rightarrow b_n = -\frac{2}{n}(-1)^n$$

الآن نعوض a_0 ، a_n ، b_n في متسلسلة فورييه الاصلية

$$f(x) = \frac{2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(0)\cos(nx)\,dx + \left(\frac{-2}{n}(-1)^n \sin(nx)\right)\right]$$

$$\Rightarrow f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{n}(-1)^n \sin(nx)$$