# جامعة تكريت
# كلية العلوم
# قسم الفيزياء

## الفيزياء الرياضية
## حل التمارين
## 2

استاذ دكتورة
عواطف صابر جاسم

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 8 & 5 & -2 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix}_{3\times3} = 1\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}_{2\times2} - 3\begin{vmatrix} 8 & -2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}_{2\times2} + (-1)\begin{vmatrix} 8 & 5 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}_{2\times2}$$

$$= 1(-15-4) - 3(-24-2) - 1(-16-(-5))$$

$$= -19 - 3(-26) - 1(-16+5)$$

$$= -19 + 78 + 11 = 70$$

$$X = \frac{D_x}{D} = \frac{70}{-6}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 8 & -2 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix}_{3\times3} = 2\begin{vmatrix} 8 & -2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}_{2\times2} - 1\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}_{2\times2} + (-1)\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}_{2\times2}$$

$$= 2(-24-2) - 1(-9-(-2)) - 1(-3-8)$$

$$= 2(-26) - 1(-9+2) - 1(-11)$$

$$= -52 + 7 + 11 = -34$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-34}{-6} = \frac{34}{6}$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 8 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}_{3\times3} = 2\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}_{2\times2} - 3\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}_{2\times2} + 1\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}_{2\times2}$$

$$= 2(-5-(-16)) - 3(-3-8) + (-6-5)$$

$$= 2(-5+16) - 3(-11) + (-11)$$

$$= 2(11) + 33 - 11 = 44$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{44}{-6}$$

ويمكن التحقق من قيم $z, y, x$ في المعادلات الاصلية :

نعوض في المعادلة ① قيم $x = \frac{70}{-6}$ , $y = \frac{34}{6}$ , $z = \frac{44}{-6}$

$$2x + 3y - z = 1$$

$$2\left(\frac{70}{-6}\right) + 3\left(\frac{34}{6}\right) - \left(-\frac{44}{6}\right) = 1$$

$$-\frac{140}{6} + \frac{102}{6} + \frac{44}{6} = 1$$

$$\cancel{\frac{6}{6}} = 1$$

$$1 = 1$$

مثال: حل مجموعة المعادلات الآتية :-

$$-3X - y + 2Z = -3$$
$$X - 2y + 3Z = 1$$
$$2X + 3y + Z = 2$$

الحل

نحسب اولاً المحددة D

$$D = \begin{vmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -3(-2-(-9)) + (1-(-6)) + 2(3-(-4))$$
$$= -3(-2+9) + (1+6) + 2(3+4)$$
$$= -3(7) + 7 + 2(7)$$
$$= -21 + 7 + 14 = 0$$

بما ان $D = 0$ فانه لايمكن حل المجموعة بواسطة المحددات

## كيرشوف

لأجل ايجاد تيارات المادة في كل فرع من فروع الشبكات الكهربائية نستخدم قانوني كيرشوف :-

القانون الاول : المجموع الجبري للتيارات الداخلة والخارجة من نقطة واحدة يساوي صفرا .

$$I_1 + I_2 + I_3 + \dots = 0$$

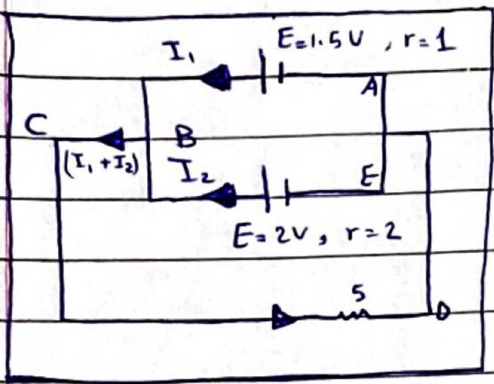
القانون الثاني : في أية دائرة مغلقة يكون المجموع الجبري لفرق الجهد في اتجاه منتظم حول الدائرة المغلقة مساويا للصفر .

$$V_1 + V_2 + V_3 + \dots = 0$$
$$V = I \cdot R$$

R : المقاومة

I : التيار

9- احسب قيمة التيارين $I_1 , I_2$ من الدائرة الكهربائية الآتية :-




على عدد التيارات المطلوبة في السؤال نجد المعادلات ، فمثلاً في هذا السؤال مطلوب إيجاد $I_1 , I_2$ اذا نجد معادلتين من الدائرة

وبتطبيق قانون كيرشوف الثاني ( ABCDA ) نجد:

$$rI_1 + r(I_1 + I_2) = E$$

$$1I_1 + 5(I_1 + I_2) = 1.5$$

$$I_1 + 5I_1 + 5I_2 = 1.5$$

$$6I_1 + 5I_2 = 1.5 \quad ----(1)$$

وبتطبيق قانون كيرشوف الثاني للدائرة ( EBCDE ) نجد :-

$$rI_2 + r(I_1 + I_2) = E$$

$$2I_2 + 5(I_1 + I_2) = 2$$

$$2I_2 + 5I_1 + 5I_2 = 2$$

$$5I_1 + 7I_2 = 2 \quad ----(2)$$

نحسب أولاً المحدد D من المعادلتين (1) ، (2) :-

$$D = \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}_{2\times2} = (6)(7) - (5)(5) = 42 - 25 = 17$$

* نستبدل معاملات $I_1$ في المحددة بنواتج المعادلات (1),(2)

وبما أن $D \neq 0$ فإن يوجد حل وحيد وهو :-

$$\Delta I_1 = \begin{vmatrix} 1.5 & 5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}_{2\times2} = (1.5)(7) - (5)(2) = 10.5 - 10 = 0.5$$

$$I_1 = \frac{\Delta I_1}{D} = \frac{0.5}{17} = 0.0294 \ Amp$$

* نستبدل معاملات $I_2$ في المحددة بنواتج المعادلات (1),(2)

$$\Delta I_2 = \begin{vmatrix} 6 & 1.5 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}_{2\times2} = (6)(2) - (1.5)(5) = 12 - 7.5 = 4.5$$

$$I_2 = \frac{\Delta I_2}{D} = \frac{4.5}{17} = 0.2647 \ Amp$$

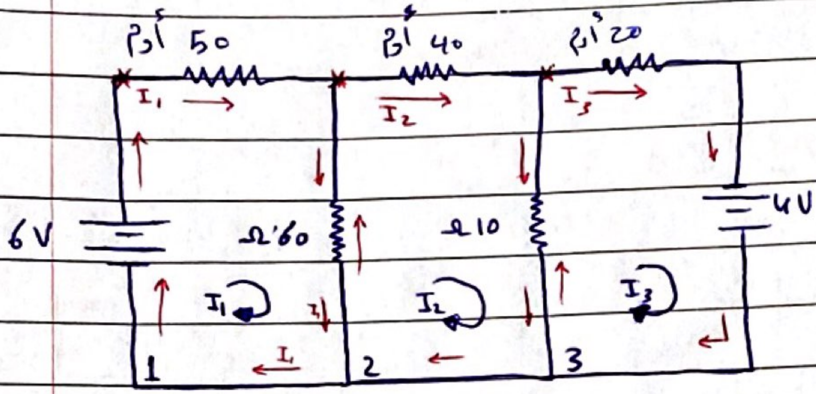
ولتحقيق صحة ذلك ، نعوض عن قيمة $(I_1 = 0.0294)$ ، $(I_2 = 0.2647 \ A)$ في المعادلة ① :-

$$6I_1 + 5I_2 = 1.5$$

$$6(0.0294) + 5(0.2647) = 1.5$$

$$0.1764 + 1.3235 = 1.5 \rightarrow 1.4999 \approx 1.5$$

10. أوجد شدة التيار المار في كل فرع من فروع الشبكة الكهربائية الآتية؟




الحل

بتطبيق قانون كيرشوف الثاني على الشبكة رقم (1) نجد:-

$$50 I_1 + 60(I_1 - I_2) = 6$$

$$50 I_1 + 60 I_1 - 60 I_2 = 6 \quad \} \div 2$$

$$25 I_1 + 30 I_1 - 30 I_2 = 3$$

$$55 I_1 - 30 I_2 = 3 \quad ----(1)$$

وبتطبيق قانون كيرشوف على الشبكة رقم (2) نجد:-

$$40 I_2 + 10(I_2 - I_3) + 60(I_2 - I_1) = 0$$

$$40 I_2 + 10 I_2 - 10 I_3 + 60 I_2 - 60 I_1 = 0 \quad \} \div 10$$

$$4 I_2 + I_2 - I_3 + 6 I_2 - 6 I_1 = 0$$

$$-6 I_1 + 11 I_2 - I_3 = 0 \quad ---(2)$$

وبتطبيق قانون كيرشوف على الشبكة رقم (3) نجد!

$$20 I_3 + 10(I_3 - I_2) = 4$$

$$20 I_3 + 10 I_3 - 10 I_2 = 4 \quad \} \div 2$$

$$10 I_3 + 5 I_3 - 5 I_2 = 4$$

$$-5 I_2 + 15 I_3 = 2 \quad ....(3)$$

نحسب أولاً المحددة D من خلال المعادلات الثلاثة اعلاه !-

$$D = \begin{vmatrix} 55 & -30 & 0 \\ -6 & 11 & -1 \\ 0 & -5 & 15 \end{vmatrix}_{3\times3} = 55 \begin{vmatrix} 11 & -1 \\ -5 & 15 \end{vmatrix}_{2\times2} - (-30) \begin{vmatrix} -6 & -1 \\ 0 & 15 \end{vmatrix}_{2\times2} + (0) \begin{vmatrix} -6 & 11 \\ 0 & -5 \end{vmatrix}_{2\times2}$$

$$= 55(165 - 5) + 30(-90 - 0) + 0(30 - 0)$$

$$= 55(160) + 30(-90) + 0$$

$$= 8800 - 2700 = 6100$$

تكملة ←

* نستبدل معاملات $I_1$ في المحددة بنواتج المعادلات (1)، (2)، (3)،

وبما أن $D \neq 0$ فإنه يوجد حل وحيد لمجموعة المعادلات وهو :

$$\Delta I_1 = \begin{vmatrix} 3 & -30 & 0 \\ 0 & 11 & -1 \\ 2 & -5 & 15 \end{vmatrix}_{3\times3} = 3\begin{vmatrix} 11 & -1 \\ -5 & 15 \end{vmatrix}_{2\times2} - (-30)\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 15 \end{vmatrix}_{2\times2} + (0)\begin{vmatrix} 0 & 11 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}_{2\times2}$$

$$= 3(165 - 5) + 30(0 - (-2)) + 0(0 - 22)$$

$$= 3(160) + 30(2) + 0 = 480 + 60 = 540$$

$$I_1 = \frac{\Delta I_1}{D} = \frac{540}{6100} = 0.0885 \ Amp$$

* نستبدل معاملات $I_2$ في المحددة بنواتج المعادلات (1)،(2)،(3) :-

$$\Delta I_2 = \begin{vmatrix} 55 & 3 & 0 \\ -6 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 15 \end{vmatrix}_{3\times3} = 55\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 15 \end{vmatrix}_{2\times2} - 3\begin{vmatrix} -6 & -1 \\ 0 & 15 \end{vmatrix}_{2\times2} + (0)\begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}_{2\times2}$$

$$= 55(0 - (-2)) - 3(-90 - 0) + 0(-12 - 0)$$

$$= 55(2) - 3(-90) + 0 = 110 + 270 = 380$$

$$I_2 = \frac{\Delta I_2}{D} = \frac{380}{6100} = 0.0622 \ Amp$$

* نستبدل معاملات $I_3$ في المحددة بنواتج المعادلات (1)،(2)،(3) :-

$$\Delta I_3 = \begin{vmatrix} 55 & -30 & 3 \\ -6 & 11 & 0 \\ 0 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 55\begin{vmatrix} 11 & 0 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}_{2\times2} - (-30)\begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}_{2\times2} + 3\begin{vmatrix} -6 & 11 \\ 0 & -5 \end{vmatrix}_{2\times2}$$

$$= 55(22 - 0) + 30(-12 - 0) + 3(30 - 0)$$

$$= 55(22) + 30(-12) + 3(30)$$

$$= 1210 - 360 + 90 = 940$$

$$I_3 = \frac{\Delta I_3}{D} = \frac{940}{6100} = 0.1540 \ Amp$$

وللتحقيق صحة ذلك ، نعوض عن قيمة ([illegible])، $(I_2 = 0.0622 A)$، $(I_3 = 0.1540 A)$ في معادلة (2) :-

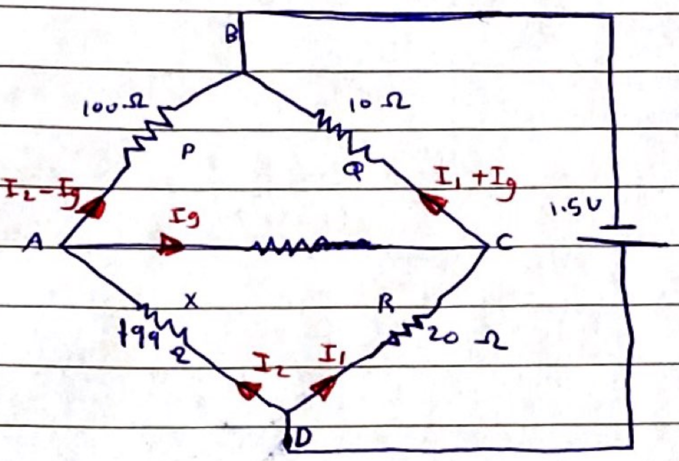
$$-5 I_2 + 15 I_3 = 2$$

$$-5(0.0622) + 15(0.1540) = 2$$

$$-0.311 + 2.31 = 2$$

$$1.999 \simeq 2$$

11. احسب قيم التيارات $I_g$ و $I_2$ , $I_1$ للدائرة الكهربائية الاتية :-




الحل

بتطبيق قانون كيرشوف للدائرة ( ACBA ) نجد :

$$20 I_g + 10(I_1 + I_g) - 100(I_2 - I_g) = 0$$

$$20 I_g + 10 I_1 + 10 I_g - 100 I_2 + 100 I_g = 0$$

$$10 I_1 - 100 I_2 + 130 I_g = 0 \quad \} \div 10$$

$$I_1 - 10 I_2 + 13 I_g = 0$$

$$I_1 = 10 I_2 - 13 I_g \quad ----(1)$$

وبتطبيق قانون كيرشوف للدائرة ( ADCA ) نجد :

$$-199 I_2 + 20 I_1 - 20 I_g = 0$$

نعوض م ① $I_1 = 10 I_2 - 13 I_g$ :-

$$-199 I_2 + 20(10 I_2 - 13 I_g) - 20 I_g = 0$$

$$-199 I_2 + 200 I_2 - 260 I_g - 20 I_g = 0$$

$$I_2 - 280 I_g = ----(2)$$

وبتطبيق قانون كيرشوف للدائرة ( DCBD ) نجد :

$$20 I_1 + 10(I_1 + I_g) = 1.5$$

$$20 I_1 + 10 I_1 + 10 I_g = 1.5$$

$$30 I_1 + 10 I_g = 1.5 \quad ----(3)$$

نحسب اولاً المحددة D من المعادلات الثلاثة :

باستخدام العمود الاول نجد المحددة :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -10 & 13 \\ 0 & 1 & -280 \\ 30 & 0 & 10 \end{vmatrix}_{3\times3} = 1\begin{vmatrix} 1 & -280 \\ 0 & 10 \end{vmatrix}_{2\times2} - (0)\begin{vmatrix} -10 & 13 \\ 0 & 10 \end{vmatrix}_{2\times2} + 30\begin{vmatrix} -10 & 13 \\ 1 & -280 \end{vmatrix}_{2\times2}$$

$$= 1(10-0) - 0 + 30(2800-13)$$

$$= 10 - 0 + 30(2787)$$

$$= 10 + 83610 = 83620$$

* نستبدل معاملات $I_1$ من المحددة بنواتج المعادلات ، باستخدام العمود الاول نجد محددة $\Delta I_1$ .

$$\Delta I_1 = \begin{vmatrix} 0 & -10 & 13 \\ 0 & 1 & -280 \\ 1.5 & 0 & 10 \end{vmatrix}_{3\times3} = 0\begin{vmatrix} 1 & -280 \\ 0 & 10 \end{vmatrix}_{2\times2} - 0\begin{vmatrix} -10 & 13 \\ 0 & 10 \end{vmatrix}_{2\times2} + 1.5\begin{vmatrix} -10 & 13 \\ 1 & -280 \end{vmatrix}_{2\times2}$$

$$= 0(10-0) - 0(-100-0) + 1.5(2800-13)$$

$$= 0 - 0 + 1.5(2800-13) = 4180.5$$

$$I_1 = \frac{\Delta I_1}{D} = \frac{4180.5}{83620} = 0.0499 \text{ Amp}$$

* نستبدل معاملات $I_2$ من المحددة D بنواتج المعادلات ، باستخدام العمود الثاني نجد المحددة $\Delta I_2$ .

$$\Delta I_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & -280 \\ 30 & 1.5 & 10 \end{vmatrix}_{3\times3} = -0\begin{vmatrix} 0 & -280 \\ 30 & 10 \end{vmatrix}_{2\times2} + 0\begin{vmatrix} 1 & 13 \\ 30 & 10 \end{vmatrix}_{2\times2} - 1.5\begin{vmatrix} 1 & 13 \\ 0 & -280 \end{vmatrix}_{2\times2}$$

$$= -0 + 0 - 1.5(-280 - 0)$$

$$= 420$$

$$I_2 = \frac{\Delta I_2}{D} = \frac{420}{83620} = 5.022 \times 10^{-3} \text{ Amp}$$

* نستبدل معاملات $I_g$ من المحددة D بنواتج المعادلات ، باستخدام العمود الثالث نجد المحددة $\Delta I_g$ .

$$\Delta I_g = \begin{vmatrix} 1 & -10 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 30 & 0 & 1.5 \end{vmatrix}_{3\times3} = 0\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 30 & 0 \end{vmatrix}_{2\times2} - 0\begin{vmatrix} 1 & -10 \\ 30 & 0 \end{vmatrix}_{2\times2} + 1.5\begin{vmatrix} 1 & -10 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}_{2\times2}$$

$$= 0 - 0 + 1.5(1-0) = 1.5$$

$$I_g = \frac{\Delta I_g}{D} = \frac{1.5}{83620} = 1.79 \times 10^{-5} \text{ Amp}$$

# تمارين الفصل الاول

س١/ أوجد قيمة المحددات الآتية :-

① $\begin{vmatrix} 15 & -2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$

الحل :-

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 15 & -2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}_{2\times 2} = (15)(4) - (-2)(-1)$$

$$= 60 - 2 = 58$$

② $\begin{vmatrix} t-2 & -3 \\ -4 & t-1 \end{vmatrix}$

الحل :-

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} t-2 & -3 \\ -4 & t-1 \end{vmatrix}_{2\times 2} = (t-2)(t-1) - (-3)(-4)$$

$$= t^2 - t - 2t + 2 - 12$$

$$= t^2 - 3t + 2 - 12 = t^2 - 3t - 10$$

$$= (t-5)(t+2) = 0$$

اما $t = 5$

او $t = -2$

③ $\begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \\ -1 & 6 & 7 \end{vmatrix}$

الحل

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \\ -1 & 6 & 7 \end{vmatrix}_{3\times 3} = -2\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}_{2\times 2} - (1)\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 7 \end{vmatrix}_{2\times 2} + (-3)\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 6 \end{vmatrix}_{2\times 2}$$

$$= -2(0-12) - (35 - (-2)) - 3(30 - 0)$$

$$= -2(-12) - (35+2) - 3(30)$$

$$= 24 - 37 - 90 = -103$$

④ $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1/2 & 7 \\ 4 & 2 & 8 \end{vmatrix}$

الحل :-

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1/2 & 7 \\ 4 & 2 & 8 \end{vmatrix}_{3\times3} = 2\begin{vmatrix} 1/2 & 7 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}_{2\times2} - (-1)\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}_{2\times2} + 4\begin{vmatrix} 3 & 1/2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}_{2\times2}$$

$$= 2\left(\frac{8}{2} - 14\right) + (24-28) + 4\left(6 - \frac{4}{2}\right)$$

$$= 2(4-14) + (-4) + 4(6-2)$$

$$= 2(-10) - 4 + 4(4) = -20 - 4 + 16 = -8$$

س/ ماهي قيم $K$ التي تجعل المنظومة الآتية عدداً لانهائياً من الحلول :-

$$KX_1 + X_2 + X_3 = 0$$
$$X_1 + KX_2 + X_3 = 0$$
$$X_1 + X_2 + KX_3 = 0$$

الحل :-

$$D = \begin{vmatrix} K & 1 & 1 \\ 1 & K & 1 \\ 1 & 1 & K \end{vmatrix}_{3\times3}$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= K\begin{vmatrix} K & 1 \\ 1 & K \end{vmatrix}_{2\times2} - (1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & K \end{vmatrix}_{2\times2} + (1)\begin{vmatrix} 1 & K \\ 1 & 1 \end{vmatrix}_{2\times2}$$

$$= K(K^2-1) - (K-1) + (1-K)$$

$$= K^3 - K - K + 1 + 1 - K = K^3 - 3K + 2$$

$$K^3 - 4K + K + 2 = 0$$

$$K(K^2-4) + K + 2 = 0$$

$$K(K-2)(K+2) + K + 2 = 0$$

عامل مشترك

$$(K+2)\,(K(K-2) + 1) = 0$$

$$(K+2)(K^2 - 2K + 1) = 0$$

$$(K+2)(K-1)(K-1) = 0$$

لما $K=-2$ أو $K=1$

س3/ اثبت ان قيم K للمنظومة الاتية هي : $K=-1, 2$

$$X+2y+KZ=0$$
$$2X+Ky+2Z=0$$
$$3X+y+Z=0$$

ملاحظة ضع $\Delta=0$

الحل

$$D=\begin{vmatrix}1&2&K\\2&K&2\\3&1&1\end{vmatrix}_{3\times3}=0$$

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}$$

$$=1\begin{vmatrix}K&2\\1&1\end{vmatrix}_{2\times2}-2\begin{vmatrix}2&2\\3&1\end{vmatrix}_{2\times2}+K\begin{vmatrix}2&K\\3&1\end{vmatrix}_{2\times2}=0$$

$$=(K-2)-2(2-6)+K(2-3K)=0$$
$$(K-2)-2(-4)+2K-3K^2=0$$
$$K-2+8+2K-3K^2=0$$
$$-3K^2+3K+6=0 \quad \} \div -1$$
$$3K^2-3K-6=0 \quad \} \div 3$$
$$K^2-K-2=0$$
$$(K+1)(K-2)=0$$

اما $K=-1$ أو $K=2$

س4/ حل المعادلات الاتية :-

① $2X+3y=8$

$X-2y=-3$

الحل

$$D=\begin{vmatrix}2&3\\1&-2\end{vmatrix}_{2\times2}=\begin{vmatrix}8\\-3\end{vmatrix}$$

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$
$$=-4-3=-7$$

تستبدل معاملات المحددة بنواتج المعادلات

$$D_x=\begin{vmatrix}8&3\\-3&-2\end{vmatrix}_{2\times2}=-16-(-9)=-16+9=-7$$

$$X=\frac{D_x}{D}=\frac{\cancel{-7}}{\cancel{-7}}=1$$

تستبدل المعاملات المحددة بنواتج المعادلات

$$D_y=\begin{vmatrix}2&8\\1&-3\end{vmatrix}_{2\times2}=-6-8=-14$$

$$y=\frac{D_y}{D}=\frac{\cancel{-14}^{2}}{\cancel{-7}}=2$$

② $3x + 5y = 8$

$4x - 2y = 1$

~~الحل~~

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}_{2\times2} = -6 - 20 = -26$$

بما ان $D \neq 0$ فانه يوجد حل وحيد هو :-

$$D_x = \begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}_{2\times2} = -16 - 5 = -21$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-21}{-26} = \frac{21}{26}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}_{2\times2} = 3 - 32 = -29$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-29}{-26} = \frac{29}{26}$$

③ $X_1 + 2X_2 + 3X_3 = 6$

$2X_1 - 2X_2 + 5X_3 = 5$

$4X_1 - X_2 + 3X_3 = 0$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix}_{3\times3} = 1\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}_{2\times2} - 2\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}_{2\times2} + 3\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}_{2\times2}$$

$$= (-6 - (-5)) - 2(6 - 20) + 3(-2 - (-8))$$

$$= (-6 + 5) - 2(-14) + 3(-2 + 8)$$

$$= -1 + 28 + 18 = 45$$

$$D_{X_1} = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & 5 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}_{3\times3} = 6\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}_{2\times2} - 2\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}_{2\times1} + 3\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}_{2\times2}$$

$$= 6(-6 - (-5)) - 2(15 - 0) + 3(-5 - 0)$$

$$= 6(-6 + 5) - 2(15) + 3(-5)$$

$$= 6(-1) - 30 - 15 = -51$$

$$X_1 = \frac{D_x}{D} = \frac{-51}{45}$$

$$D_{X_2} = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 5 & 5 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix}_{3\times3} = 1\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}_{2\times2} - 6\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}_{2\times2} + 3\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}_{2\times2}$$

$$= (15 - 0) - 6(6 - 20) + 3(0 - 20)$$

$$= 15 - 6(-14) + 3(-20) = 39$$

تكملة ←

$$X_2 = \frac{D_{x_2}}{D} = \frac{39}{45}$$

$$D_{x_3} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & -2 & 5 \\ 4 & -1 & 0 \end{vmatrix}_{3\times3} = 1\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}_{2\times2} - 2\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}_{2\times2} + 6\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}_{2\times2}$$

$$= (0-(-5)) - 2(0-20) + 6(-2-(-8))$$

$$= 5 + 40 + 6(-2+8) = 5 + 40 + 36 = 81$$

$$X_3 = \frac{D_{x_3}}{D} = \frac{81}{45}$$

(4)
$$3x - y + z = 3$$
$$x - 2y - 3z = 1$$
$$2x + 3y + z = 2$$

الحل

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}_{3\times3} = 3\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}_{2\times2} - (-1)\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}_{2\times2} + 1\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}_{2\times2}$$

$$= 3(-2-(-9)) + 1(1-(-6)) + 1(3-(-4))$$

$$= 3(-2+9) + (1+6) + (3+4) = 3(7) + 7 + 7 = 35$$

$$D_x = \begin{vmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}_{3\times3} = -3\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}_{2\times2} - (-1)\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}_{2\times2} + 1\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}_{2\times2}$$

$$= -3(-2-(-9)) + 1(1-(-6)) + 1(3-(-4))$$

$$= -3(-2+9) + 1(1+6) + 1(3+4)$$

$$= -3(7) + 7 + 7 = -7$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-7}{35} = \frac{-1}{5}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}_{3\times3} = 3\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}_{2\times2} - (-3)\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}_{2\times2} + 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}_{2\times2}$$

$$= 3(1-(-6)) + 3(1-(-6)) + (2-2)$$

$$= 3(1+6) + 3(1+6) + 0 = 3(7) + 3(7) + 0 = 42$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{42}{35}$$

تكملة ←

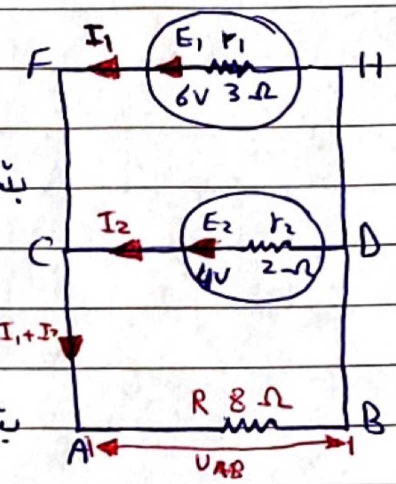
$$D_z = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}_{3\times3} = 3\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}_{2\times2} - (-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}_{2\times2} + (-3)\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}_{2\times2}$$

$$= 3(-4-3) + 1(2-2) - 3(3-(-4))$$

$$= 3(-7) + 0 - 3(3+4) = -21 - 3(7) = -21 - 21 = -42$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{-42}{35}$$

س 15/ احسب قيمة التيارين $I_1 , I_2$ في الدائرة الكهربائية




الحل

بتطبيق قوانين كيرشوف الثاني للدائرة (HFCABDH)

$$3I_1 + 8(I_1 + I_2) = 6$$

$$3I_1 + 8I_1 + 8I_2 = 6$$

$$11I_1 + 8I_2 = 6 \quad ---(1)$$

بتطبيق قانون كيرشوف الثاني للدائرة (DCABD)

$$2I_2 + 8(I_1 + I_2) = 4$$

$$2I_2 + 8I_1 + 8I_2 = 4$$

$$8I_1 + 10I_2 = 4 \quad \} \div 2$$

$$4I_1 + 5I_2 = 2 \quad ---(2)$$

نحسب قيمة المحددة D من م ①, م ② :-

$$D = \begin{vmatrix} 11 & 8 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}_{2\times2} = 55 - 32 = 23$$

بما ان $D \neq 0$ فيوجد حل وحيد وهو !

$$\Delta I_1 = \begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}_{2\times2} = 30 - 16 = 14$$

$$I_1 = \frac{\Delta I_1}{D} = \frac{14}{23}$$

$$I_2 = \frac{\Delta I_2}{D}$$

$$\Delta I_2 = \begin{vmatrix} 11 & 6 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}_{2\times2} = 22 - 24 = -2$$

$$I_2 = \frac{-2}{23}$$

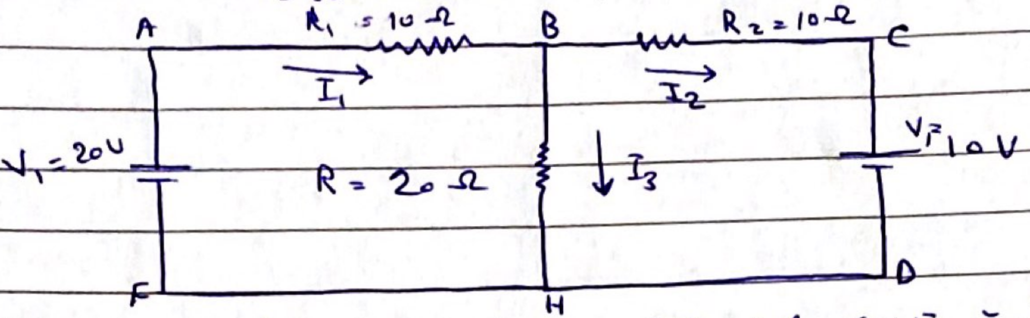
ولتحقق صحة ذلك ، نعوض قيم $I_1 = \frac{14}{23}$ , $I_2 = \frac{-2}{23}$ في م ② :-

$$4I_1 + 5I_2 = 2 \Rightarrow 4\left(\frac{14}{23}\right) + 5\left(\frac{-2}{23}\right) = 2$$

$$\frac{56}{23} - \frac{10}{23} = 2 \Rightarrow \frac{56}{23} = 2$$

$$2 = 2$$

س6/ احسب قيم التيارات $I_1$ , $I_2$ , $I_3$ من الدائرة الكهربائية




الحل

بتطبيق قانون كيرشوف الثاني للدائرة ( ABHFA )

$$10 I_1 + 20 (I_1 - I_2) = 20$$

$$10 I_1 + 20 I_1 - 20 I_2 = 20$$

$$30 I_1 - 20 I_2 = 20 \quad \} \div 10$$

$$3 I_1 - 2 I_2 = 2 \quad \text{---} (1)$$

بتطبيق قانون كيرشوف الثاني للدائرة (ABCDHFA)

$$10 I_1 + 10 I_2 = 10 \quad \} \div 10$$

$$I_1 + I_2 = 1 \quad \text{---} (2)$$

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}_{2\times 2} = 3 - (-2) = 3 + 2 = 5$$

$$\Delta I_1 = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}_{2\times 2} = 2 - (-2) = 2 + 2 = 4$$

$$I_1 = \frac{\Delta I_1}{D} = \frac{4}{5} = 0.8 \text{ Amp}$$

$$\Delta I_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}_{2\times 2} = 3 - 2 = 1$$

$$I_2 = \frac{\Delta I_2}{D} = \frac{1}{5} = 0.2 \text{ Amp}$$

$$I_3 = I_1 - I_2 = 0.8 - 0.2 = 0.6 \text{ Amp}$$

وللتحقق من صحة ذلك ، نعوض قيم $I_1 = 0.8$ ، $I_2 = 0.2$ في م ② :

$$I_1 + I_2 = 1 \Rightarrow 0.8 + 0.2 = 1$$

$$1 = 1$$